Appendice F

# Proprietà della trasformata di Fourier

In questa Appendice sono riportate schematicamente le proprietà più importanti della trasformata di Fourier per segnali TC e TD. Inoltre, sono riportate alcune trasformate notevoli (TC e TD).

## F.1 Trasformata di Fourier a TC

### F.1.1 Definizioni

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(f)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, \mathrm{d}f \qquad \text{(equazione di sintesi)}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, \mathrm{d}t \qquad \text{(equazione di analisi)}$$

### F.1.2 Proprietà

1. **Linearità:**

$$\alpha_1 x(t) + \alpha_2 y(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \alpha_1 X(f) + \alpha_2 Y(f)\,, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}\,.$$

2. **Valore nell'origine:**

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \mathrm{d}t\,, \qquad x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, \mathrm{d}f\,.$$

*Nota: vale se le quantità calcolate ad ambo i membri sono finite.*

3. **Dualità:**

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(f)\,,$$
$$X(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} x(-f)\,.$$

4. **Simmetria:**

$$\begin{aligned} x(-t) &\xleftrightarrow{\text{FT}} X(-f)\,, \\ x^*(t) &\xleftrightarrow{\text{FT}} X^*(-f)\,, \\ x^*(-t) &\xleftrightarrow{\text{FT}} X^*(f)\,. \end{aligned}$$

*Nota: come conseguenza, un segnale pari ha spettro pari, un segnale dispari ha spettro dispari, un segnale reale ha spettro hermitiano, un segnale reale e pari ha spettro reale e pari, un segnale reale e dispari ha spettro immaginario puro e dispari.*

5. **Traslazione nel tempo:**

$$y(t) = x(t - t_0) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(f) = X(f)\,e^{-j2\pi f t_0}\,, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}\,.$$

6. **Traslazione in frequenza:**

$$y(t) = x(t)\,e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(f) = X(f - f_0)\,, \quad \forall f_0 \in \mathbb{R}\,.$$

7. **Modulazione:**

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(f) = \frac{1}{2}e^{j\varphi_0}X(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}X(f + f_0)\,, \quad \forall f_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}\,.$$

8. **Cambiamento di scala:**

$$y(t) = x(at) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(f) = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)\,, \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}\,.$$

9. **Derivazione nel tempo:**

$$y(t) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(f) = (j2\pi f)^k X(f)\,, \quad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

10. **Derivazione in frequenza:**

$$(-t)^k x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{(j2\pi)^k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}f^k}X(f)\,, \quad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

11. **Integrazione:**

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(f) = \frac{1}{2}X(0)\,\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}\,.$$

*Nota: se* $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{d}t = 0$ *si ha una versione semplificata (senza la parte impulsiva).*

12. **Convoluzione:**

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau \xleftrightarrow{\text{FT}} Z(f) = X(f)Y(f)\,.$$

**13. Prodotto:**

$$z(t) = x(t)y(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} Z(f) = X(f) * Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)Y(f-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

**14. Parseval:**

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\,\mathrm{d}f\,, \qquad \mathcal{E}_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)\,\mathrm{d}f\,.$$

*Nota: $x(t)$ e $y(t)$ segnali di energia (a quadrato sommabile).*

**15. Replicazione/campionamento:**

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT_0) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(f) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{k}{T_0}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T_0}\right), \quad \forall T_0 \in \mathbb{R}_+\,,$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_0)\,\delta(t-kT_0) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(f) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f-\frac{k}{T_0}\right), \quad \forall T_0 \in \mathbb{R}_+\,.$$

**16. Formule di Poisson:**

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT_0) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{k}{T_0}\right)e^{j2\pi\frac{k}{T_0}t}, \quad \forall T_0 \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(prima formula di Poisson)}\,,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_0)e^{-j2\pi\frac{k}{T_0}t} = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f-\frac{k}{T_0}\right), \quad \forall T_0 \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(seconda formula di Poisson)}\,.$$

### F.1.3 Trasformate notevoli

| Segnale $x(t)$ | Trasformata $X(f)$ |
|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $1$ | $\delta(f)$ |
| $\mathrm{u}(t)$ | $\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$ |
| $\mathrm{sgn}(t)$ | $\frac{1}{j\pi f}$ |
| $\frac{1}{t}$ | $-j\pi \mathrm{sgn}(f)$ |
| $\mathrm{rect}(t)$ | $\mathrm{sinc}(f)$ |
| $\Lambda(t)$ | $\mathrm{sinc}^2(f)$ |
| $\mathrm{sinc}(t)$ | $\mathrm{rect}(f)$ |
| $\mathrm{sinc}^2(t)$ | $\Lambda(f)$ |
| $e^{-at}\,\mathrm{u}(t),\ a \in \mathbb{R}_+$ | $\frac{1}{a + j2\pi f}$ |
| $t\,e^{-at}\mathrm{u}(t),\ a \in \mathbb{R}_+$ | $\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$ |
| $e^{-a\lvert t\rvert},\ a \in \mathbb{R}_+$ | $\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$ |
| $e^{j2\pi f_0 t}$ | $\delta(f - f_0)$ |
| $\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ | $\frac{1}{2}e^{j\varphi_0}\,\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}\,\delta(f + f_0)$ |
| $\sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ | $\frac{1}{2j}e^{j\varphi_0}\,\delta(f - f_0) - \frac{1}{2j}e^{-j\varphi_0}\,\delta(f + f_0)$ |
| $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0),\ T_0 \in \mathbb{R}_+$ | $\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$ |

*Nota: applicando la proprietà di dualità è possibile ottenere da ogni coppia* $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(f)$ *una nuova coppia* $X(t) \xleftrightarrow{FT} x(-f)$ *(le più importanti sono comunque riportate per completezza).*

## F.2 Trasformata di Fourier a TD

### F.2.1 Definizioni

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathrm{FT}} X(\nu)$$

$$x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\,e^{j2\pi\nu n}\,\mathrm{d}\nu \qquad \text{(equazione di sintesi)}$$

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\,e^{-j2\pi\nu n} \qquad \text{(equazione di analisi)}$$

*Nota:* $X(\nu)$ *è una funzione periodica di periodo* $1$.

### F.2.2 Proprietà

1. **Linearità:**

$$\alpha_1 x(n) + \alpha_2 y(n) \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} \alpha_1 X(\nu) + \alpha_2 Y(\nu)\,, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}\,.$$

2. **Valore nell'origine:**

$$X(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\,, \qquad x(0) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\,\mathrm{d}\nu\,.$$

*Nota: vale se le quantità calcolate ad ambo i membri sono finite.*

3. **Simmetria:**

$$\begin{aligned} x(-n) &\overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} X(-\nu)\,,\\ x^*(n) &\overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} X^*(-\nu)\,,\\ x^*(-n) &\overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} X^*(\nu)\,. \end{aligned}$$

*Nota: come conseguenza, un segnale pari ha spettro pari, un segnale dispari ha spettro dispari, un segnale reale ha spettro hermitiano, un segnale reale e pari ha spettro reale e pari, un segnale reale e dispari ha spettro immaginario puro e dispari.*

4. **Traslazione nel tempo:**

$$y(n) = x(n-n_0) \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} Y(\nu) = X(\nu)\, e^{-j2\pi\nu n_0}\,, \quad \forall n_0 \in \mathbb{Z}\,.$$

5. **Traslazione in frequenza:**

$$y(n) = x(n)\, e^{j2\pi\nu_0 n} \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} Y(\nu) = X(\nu-\nu_0)\,, \quad \forall \nu_0 \in \mathbb{R}\,.$$

6. **Modulazione:**

$$y(n) = x(n)\cos(2\pi\nu_0 n + \varphi_0) \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} Y(\nu) = \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} X(\nu-\nu_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} X(\nu+\nu_0)\,, \quad \forall \nu_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}\,.$$

7. **Espansione:**

$$y(n) = x\left[\frac{n}{L}\right] \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} Y(\nu) = X(L\nu)\,, \quad \forall L \in \mathbb{N}\,.$$

8. **Decimazione:**

$$y(n) = x(nM) \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} Y(\nu) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{\nu-k}{M}\right)\,, \quad \forall M \in \mathbb{N}\,.$$

9. **Differenza:**

$$\nabla_k[x(n)] = \nabla_1\{\nabla_{k-1}[x(n)]\} \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} Y(\nu) = \left(1 - e^{-j2\pi\nu}\right)^k X(\nu)\,, \quad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

**10. Derivazione in frequenza:**

$$(-n)^k x(n) \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{(j2\pi)^k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\nu^k} X(\nu), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

**11. Somma:**

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(\nu) = \frac{1}{2} X(0)\, \widetilde{\delta}(\nu) + \frac{X(\nu)}{1-e^{-j2\pi\nu}}.$$

*Nota: se* $X(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) = 0$ *si ha una versione semplificata (senza la parte impulsiva).*

**12. Convoluzione:**

$$z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) y(n-k) \xleftrightarrow{\text{FT}} Z(\nu) = X(\nu) Y(\nu).$$

**13. Prodotto:**

$$z(n) = x(n) y(n) \xleftrightarrow{\text{FT}} Z(\nu) = X(\nu) * Y(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\lambda) Y(\nu-\lambda)\, \mathrm{d}\lambda.$$

*Nota: nel dominio della frequenza si effettua la convoluzione periodica.*

**14. Parseval:**

$$\mathcal{E}_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu, \qquad \mathcal{E}_{xy} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y^*(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) Y^*(\nu)\, \mathrm{d}\nu.$$

*Nota:* $x(n)$ *e* $y(n)$ *segnali di energia (a quadrato sommabile).*

**15. Replicazione/campionamento:**

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-kN_0) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(\nu) = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X\left(\frac{k}{N_0}\right) \widetilde{\delta}\left(\nu - \frac{k}{N_0}\right), \quad \forall N_0 \in \mathbb{N},$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kN_0)\, \delta(n-kN_0) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(\nu) = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X\left(\nu - \frac{k}{N_0}\right), \quad \forall N_0 \in \mathbb{N}.$$

**16. Formule di Poisson:**

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-kN_0) = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X\left(\frac{k}{N_0}\right) e^{j2\pi \frac{k}{N_0} n}, \quad \forall N_0 \in \mathbb{N} \qquad \text{(prima formula di Poisson)},$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kN_0) e^{-j2\pi \frac{k}{N_0} n} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X\left(\nu - \frac{k}{N_0}\right), \quad \forall N_0 \in \mathbb{N} \qquad \text{(seconda formula di Poisson)}.$$

### F.2.3 Trasformate notevoli

| Segnale $x(n)$ | Trasformata $X(\nu)$ |
|---|---|
| $\delta(n)$ | $1$ |
| $1$ | $\widetilde{\delta}(\nu)$ |
| $\mathrm{u}(n)$ | $\frac{1}{2}\,\widetilde{\delta}(\nu) + \frac{1}{1-e^{-j2\pi\nu}}$ |
| $\mathrm{sgn}(n)$ | $\frac{2}{1-e^{-j2\pi\nu}}$ |
| $\mathcal{R}_N(n)$ | $\mathcal{D}_N(\nu)$ |
| $\mathscr{B}_{2N}(n)$ | $\frac{1}{N}\,\mathcal{D}_N^2(\nu)\,e^{-j2\pi\nu}$ |
| $\mathrm{sinc}(2\nu_c n)$, $0 < \nu_c < \frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2\nu_c}\mathrm{rep}_1\left[\mathrm{rect}\left(\frac{\nu}{2\nu_c}\right)\right]$ |
| $\mathrm{sinc}^2(2\nu_c n)$, $0 < \nu_c < \frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2\nu_c}\mathrm{rep}_1\left[\Lambda\left(\frac{\nu}{2\nu_c}\right)\right]$ |
| $a^n\mathrm{u}(n)$, $\lvert a\rvert < 1$ | $\frac{1}{1-a\,e^{-j2\pi\nu}}$ |
| $(n+1)\,a^n\mathrm{u}(n)$, $\lvert a\rvert < 1$ | $\frac{1}{(1-a\,e^{-j2\pi\nu})^2}$ |
| $a^{\lvert n\rvert}$, $\lvert a\rvert < 1$ | $\frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos(2\pi\nu)}$ |
| $e^{j2\pi\nu_0 n}$ | $\widetilde{\delta}(\nu-\nu_0)$ |
| $\cos(2\pi\nu_0 n+\varphi_0)$ | $\frac{1}{2}\,e^{j\varphi_0}\,\widetilde{\delta}(\nu-\nu_0)+\frac{1}{2}\,e^{-j\varphi_0}\,\widetilde{\delta}(\nu+\nu_0)$ |
| $\sin(2\pi\nu_0 n+\varphi_0)$ | $\frac{1}{2j}\,e^{j\varphi_0}\,\widetilde{\delta}(\nu-\nu_0)-\frac{1}{2j}\,e^{-j\varphi_0}\,\widetilde{\delta}(\nu+\nu_0)$ |
| $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(n-kN_0)$, $N_0\in\mathbb{N}$ | $\frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1}\widetilde{\delta}\left(\nu-\frac{k}{N_0}\right)$ |