CALCOLO COMBINATORIO

Studio del numero delle possibili corrispondenze (applicazioni) di un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$ in un altro. Ciò, in pratica, o nelle applicazioni, equivale a considerare un insieme $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ di oggetti di natura qualsiasi, detti genericamente **elementi**, ed un insieme numerico $P = \{1, 2, \ldots, p\}$, i cui elementi si dicono **posti**, e studiare le diverse possibilità di assegnazione di un posto di P agli elementi di E.

1. Funzione fattoriale

$$! \; : \; n \in \mathbb{N} \longrightarrow n! \in \mathbb{N} \, ,$$

$$(1.1) \qquad 0! = 1 \, , \qquad (n+1)! = n!(n+1) \, .$$

$$1! = 1 \cdot 0! = 1 \, ,$$

$$2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 \, ,$$

$$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \, ,$$

e così via. Più in generale,

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\ , \tag{1.2}$$

Fattoriale di un qualsiasi numero naturale n**:** prodotto di tutti i numeri naturali non maggiori di n.

2. Disposizioni

Due insiemi E e P.
$p =$ numero di elementi di $P = |P|$.
$n =$ numero di elementi di $E = |E|$.

Definizione 2.1. *Supposto $p \leq n$, ogni applicazione iniettiva di P in E (che a ciascun posto $h \in P$ associa un elemento e_h di E in maniera tale che ogni elemento occupi — ossia corrisponda a — un solo posto) , si dice* **disposizione** *degli n elementi di E sui p posti di P.*

Qual è il numero di tutte le possibili disposizioni di n elementi su p posti?

(1) Possiamo scegliere in n modi distinti l'elemento $e_i \in E$ da associare al posto 1 (o *col quale occupare* il posto 1).
(2) L'elemento destinato ad occupare il posto 2 può essere scelto soltanto nell'insieme $E \setminus \{d_1\}$, ossia soltanto in $n-1$ modi distinti.

Così, *per ogni* scelta di d_1, ci sono $n-1$ scelte di d_2, e la coppia (d_1, d_2) potrà scegliersi in $n(n-1)$ modi distinti.

Per ogni scelta di questa coppia, l'elemento da associare al posto 3 dovrà scegliersi in $E \setminus \{d_1, d_2\}$, ossia in $n-2$ modi distinti. I primi tre posti potranno dunque essere occupati in $n(n-1)(n-2)$ modi distinti.

Numero delle disposizioni di n elementi su p posti (ossia il numero di modi in cui si possa definire un'applicazione iniettiva di P in E):

$$D_{n,p} = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+2)(n-p+1) \ .$$

Possiamo scrivere questa formula in maniera più compatta. Infatti, moltiplicando e dividendo il suo secondo membro per $(n-p)!$, otteniamo

$$D_{n,p} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)\cdot(n-p)!}{(n-p)!} \,.$$

Ma

$$\begin{aligned} & n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)\cdot(n-p)! = \\ & = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+2)\cdot(n-p+1)! = \\ & = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+3)\cdot(n-p+2)! = \\ & = \ldots = n\cdot(n-1)! = n! \,, \end{aligned}$$

da cui segue che

$$D_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \,. \tag{2.1}$$

3. Permutazioni

Allorquando $p = n$, ogni applicazione iniettiva di P in E è addirittura biettiva (infatti la sua immagine, dovendo contenere, per l'iniettività, p elementi distinti, dovrà in questo caso contenerne n, ossia *tutti* gli elementi di E). In tal caso, le disposizioni degli elementi di E sui posti di P si dicono **permutazioni** di E. Ciò può esprimersi nella seguente

Definizione 3.1. *Si dice* **permutazione** *(***in senso ristretto***) di un insieme E di n elementi ogni applicazione biettiva dell'insieme* $\{1, 2, \dots, n\}$ *in E.*

Lo studio del numero P_n delle possibili permutazioni di un insieme E di n elementi risulta dunque un caso particolare del precedente.

Numero delle permutazioni dell'insieme E:

$$P_n = D_{n,n} = n(n-1)(n-2) \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \,. \tag{3.1}$$

Sia ora π una qualunque corrispondenza biettiva di E in sé, e sia $p : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow E$ una *qualunque* permutazione di E. Poiché p è biettiva, è invertibile, cosicché, per ogni $e \in E$, possiamo considerare il numero naturale $h = \overset{-1}{p}(e) \in \{1, 2, \ldots, n\}$. È allora anche possibile considerare la permutazione $p' : h \in \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow e_h = p'(h) \in E$ definita dall'essere $e_h = \pi(e)$ per $h = \overset{-1}{p}(e)$. Con ciò risulta

$$\pi(e) = (p' \circ \overset{-1}{p})(e) \ .$$

In conclusione, *ogni* applicazione biettiva di E in sé risulta composta di due permutazioni di E. Ciò ci consente di generalizzare la Definizione 3.1 nella seguente

Definizione 3.2. *Si dice* **permutazione** *di un insieme E di n elementi ogni applicazione biettiva di E in sé.*

4. Coefficienti binomiali

Siano $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Definizione 4.1. *Si dice* **coefficiente binomiale** *l'applicazione*

$$(n, p) \in \bigcup_{h \in \mathbb{N}} [\{h\} \times \{1, \ldots h\}] \longrightarrow \binom{n}{p} \in \mathbb{N}\,,$$

definita dall'essere

$$\binom{0}{0} = 1\,, \qquad \binom{1}{0} = 1$$

e, per $n, p \geq 1$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}\,. \tag{4.1}$$

Da questa Definizione segue subito il

Teorema 4.1. *Per ogni* $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ $(p \leq n)$, *vale l'identità*

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}\,. \tag{4.2}$$

Infatti, sostituendo p con $n-p$ nella (4.1), il secondo membro resta inalterato.

Si ha inoltre

Teorema 4.2. *Per ogni* $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ $(p \leq n)$, *vale l'identità*

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} \,. \tag{4.3}$$

Infatti, applicando la (5.1), si ha

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \\ = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} \,,$$

ma, essendo $p! = (p-1)!p$ e $(n-p)! = (n-p-1)!(n-p)$, questa uguaglianza può scriversi

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \\ = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!}\left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p}\right) \,,$$

ossia

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!} \cdot \frac{n}{p(n-p)} \,.$$

5. Combinazioni

Le disposizioni di n elementi su p posti sono *tutte* le applicazioni iniettive di P in E. Se ne scelga una, diciamola $d : h \in P \longrightarrow d_h \in E$, e si consideri la sua immagine $d(P)$. L'insieme $d(P)$ contiene p elementi. È ora possibile definire un'altra applicazione iniettiva d' di P in E in due modi: (1) anzitutto, possiamo associare ad alcuni dei posti di P, anziché i loro corrispondenti secondo la d, degli elementi di $E \backslash d(P)$: in tal caso, i codomini $d(P)$ di d e $d'(P)$ di d' saranno diversi; (2) in secondo luogo, possiamo decidere di associare in modo diverso i p elementi di $d(P)$ ai p posti di P. In questo secondo caso, $d(P) = d'(P)$, e le due disposizioni d e d' si dicono *equivalenti*. Più in generale,

Definizione 5.1. *Due disposizioni d_1 e d_2 di uno stesso insieme E di n elementi sui p posti di uno stesso insieme numerico P si dicono* **equivalenti** *se e soltanto se*

$$d_1(P) = d_2(P) \,. \tag{5.1}$$

La correttezza della definizione, ossia il fatto che la condizione (5.1) definisca proprio una relazione d'equivalenza nell'insieme di tutte le disposizioni di E su p posti, si verifica immediatamente. Ciò ci consente di dare anche la seguente

Definizione 5.2. *Si dice* **combinazione** *di p (degli n) elementi di E ogni classe d'equivalenza di disposizioni di E su p posti, rispetto alla relazione definita dalla* (5.1).

Siano ora d e d' due disposizioni *equivalenti* di E su p posti. Poiché tanto d quanto d' risultano corrispondenze *biettive* tra P e $d(P) = d'(P)$, esse sono **permutazioni** di $d(P)$. È allora possibile considerare la corrispondenza biettiva $p \ : \ d_h \in d(P) \longrightarrow d'_h \in d'(P)$ di $d(P) = d'(P)$ in sé. Una tale corrispondenza definisce ovviamente una **permutazione** di $d(P)$. Dunque, una *combinazione* κ di E a p elementi contiene tutte e sole le permutazioni di $d(P)$ (essendo d un arbitrario elemento di κ). Poiché $d(P)$ contiene p elementi, il numero degli elementi di κ è $p!$. Il **numero delle combinazioni di E a p elementi** è dunque il rapporto tra il numero delle sue disposizioni ed il numero $p!$ degli elementi di ciascuna combinazione:

$$C_{n,p} = \frac{D_{n,p}}{P_p} = \frac{D_{n,p}}{p!} \,, \tag{5.2}$$

ovvero

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p} \,. \tag{5.3}$$

Osservazione 5.1

Si deve osservare che la nozione di "combinazione" può sempre vantaggiosamente sostituirsi con la nozione di "scelta" (che, intuitivamente, pone meno problemi circa l'ordinamento degli oggetti scelti in E). Ad esempio, se scegliamo tre dolci da un vassoio che ne contiene dieci, possiamo pensare o no di metterli in un piattino e portarli via. Se lo facciamo, formiamo *materialmente* una combinazione di tre dolci; se invece ci limitiamo a pensare quali dolci mangeremmo volentieri, stiamo facendo una scelta che non necessariamente comporta una combinazione. Tuttavia, le due operazioni sono equivalenti dal punto di vista matematico. Per questo motivo le combinazioni di p fra n

elementi di un insieme E si diranno spesso, ove risulti più espressivo, **scelte** di p (fra n) elementi di E.

Osservazione 5.2

Quando scegliamo p dolci tra n, possiamo immaginare di prenderli in esame uno per uno e pensare "sì" quando vogliamo scegliere il dolce che stiamo esaminando, e "no" quando non vogliamo sceglierlo. Se traduciamo il "sì" e il "no" in termini numerici, ad esempio convenendo che "sì" è codificato da 1 e "no" è codificato da 0, allora una scelta di p dolci da un vassoio che ne contiene n è semplicemente un modo per associare a ciascun dolce uno dei due numeri 1 e 0, ossia un'applicazione dall'insieme dei dolci all'insieme $\{0, 1\}$.

Dunque, ogni scelta (o combinazione) di elementi di un insieme dato può sempre riguardarsi come un'applicazione di quell'insieme in $\{0, 1\}$. Quest'osservazione è importante, poiché mostra che ogni applicazione *a valori* in E (purché definita in un insieme *più piccolo* di E stesso), si può sempre fare corrispondere un'applicazione *definita in* E ed a valori in $\{0, 1\}$.

Osservazione 5.3

Assegnata comunque un'applicazione σ di un insieme qualsiasi $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ in $\{0,1\}$, si consideri la n-upla $(\sigma(e_1), \sigma(e_2), \dots, \sigma(e_n))$. Ovviamente, poiché, per ogni $h \in \{1, \dots, n\}$, $\sigma(e_h)$ coincide con 0 o con 1, la n-upla considerata è semplicemente un elemento del prodotto cartesiano $\{0,1\}^n$ dell'insieme $\{0,1\}$ n volte per se stesso. Perciò ogni scelta di un numero qualsiasi $k \leq n$ di elementi di E si identifica con un elemento di $\{0,1\}^n$. Viceversa, ad ogni elemento di $\{0,1\}^n$, diciamolo $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ (con δ_h uguale a 0 oppure a 1 per ogni h), si può far corrispondere l'applicazione σ_δ di E in $\{0,1\}$ tale che $\sigma(e_h) = \delta_h$. Perciò, l'insieme di tutte le possibili scelte di alcuni elementi di E si identifica con $\{0,1\}^n$. Ora, il numero degli elementi di $\{0,1\}^n$ è ovviamente 2^n, mentre il numero di tutte le possibili scelte di alcuni elementi di E è la somma dell'unica possibile scelta di 0 elementi, delle $\binom{n}{1}$ possibili scelte di un elemento, delle $\binom{n}{2}$ possibili scelte di due elementi, delle $\binom{n}{3}$ possibili scelte di tre elementi, ... , delle $\binom{n}{n-1}$ possibili scelte di $n-1$

elementi, e dell'unica possibile scelta di n elementi. Ne consegue

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .$$

Osservazione 5.4

Conveniamo di denotare con $\mathcal{P}(E)$ l'insieme delle parti di E, ossia la famiglia di tutti i sottoinsiemi di E. Ovviamente, è possibile istituire una corrispondenza biettiva tra le applicazioni definite in E ed a valori in $\{0, 1\}$ e gli elementi di $\mathcal{P}(E)$. Perciò, se $|E| = n$, allora $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.

6. Disposizioni con ripetizione

La nozione di "disposizione" è stata data in riferimento alle applicazioni *iniettive* di P in E, ma può generalizzarsi, in maniera naturale, al caso di applicazioni *qualsiasi*, e dunque anche al caso $p > n$. In quest'ultimo caso, infatti, una qualsiasi applicazione di P in E non può certo essere iniettiva, ma solo suriettiva. Tuttavia, si può rinunciare anche a questa ipotesi. Precisamente,

Definizione 6.1. *Assegnati comunque* $p \in \mathbb{N}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *ogni applicazione di* P *in* E *si dice* **disposizione con ripetizioni** *(degli* n *elementi) di* E *sui* p *posti di* P.

La determinazione del numero delle possibili disposizioni con ripetizioni di E su p posti è ancor più immediata di quello delle disposizioni senza ripetizioni (che, d'ora in avanti, si diranno **disposizioni semplici**). Invero, come per queste ultime, per definire una disposizione con ripetizioni $\hat{d}$ dobbiamo scegliere, per ogni $h \in P$, il suo trasformato $\hat{d}(h) = \hat{d}_h \in E$. Come nella Sezione 3, si prenda $h = 1$. Ovviamente $\hat{d}_1$ può assegnarsi in n modi diversi. *Per ciascuna assegnazione* di $\hat{d}_1$, si passerà poi alla scelta di $\hat{d}_2$. Stavolta, però, essendo ammesso che l'applicazione $\hat{d}$ non sia iniettiva, si potrà anche prendere $\hat{d}_2 = \hat{d}_1$, cosicché anche $\hat{d}_2$ potrà assegnarsi in n modi diversi. Perciò, la coppia di valori $(\hat{d}_1, \hat{d}_2)$ potrà scegliersi in n^2 modi distinti. Con lo stesso ragionamento, si vede che la terna di valori $(\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3)$ si può fissare in n^3 modi diversi, e procedendo allo stesso modo sino a p, si trova che, detto $\hat{D}_{n,p}$ il numero delle disposizioni con ripetizioni degli n elementi di E su p posti, risulta

$$\hat{D}_{n,p} = n^p \ . \tag{6.1}$$

Si osserverà che, nel caso in cui il numero p dei posti a disposizione sia maggiore del numero n degli elementi da disporre, non si possono escludere applicazioni che non siano neppure suriettive, ossia tali che esista un elemento $e \in E$ che non sia il trasformato di alcun $h \in P$.

7. Combinazioni con ripetizione

Alla stessa stregua di quella di "disposizione", anche la nozione di "combinazione" può estendersi facilmente al caso di applicazioni *qualsiasi* di P in E. Ciò, del resto, è del tutto naturale, se si tien conto della relazione che lega le combinazioni alle disposizioni semplici. In effetti, però, l'equivalenza tra disposizioni con ripetizione è più complessa di quella tra disposizioni semplici.

Anzitutto, dovremo muovere dalla seguente

Definizione 7.1. *Assegnati comunque $p \in N$ e $n \in N$, sia $\hat{d}\ :\ h \in P \longrightarrow \hat{d}_h \in E$ una disposizione con ripetizioni di E su p posti. Per ogni $e_j \in E$, si dirà* **molteplicità di e_j nella disposizione** *$\hat{d}$ il numero $\mu(e_j, \hat{d})$ degli elementi $h \in P$ tali che $\hat{d}(h) = \hat{d}_h = e_j$.*

In particolare, si porrà $\mu(e_j, \hat{d}) = 0$ se e soltanto se $e_j \notin \hat{d}(P)$. In altre parole, si dice che **la molteplicità di un elemento $e_j \in E$ nella disposizione $\hat{d}$ è nulla** se e soltanto se e_j *non appartiene al codominio di $\hat{d}$.*

Questa definizione consente di introdurre un'opportuna relazione d'equivalenza tra le disposizioni con ripetizione.

Definizione 7.2. *Assegnati comunque $p \in N$ e $n \in N$, due disposizioni con ripetizioni $\hat{d}_1$ ed $\hat{d}_2$ di E su p posti si dicono* **equivalenti** *se*

$$\mu(e_j, \hat{d}_1) = \mu(e_j, \hat{d}_2)\ , \qquad \forall\, e_j \in E\ . \tag{7.1}$$

Si ha anzitutto il

Teorema 7.1. *Se $\hat{d}_1$ e $\hat{d}_2$ sono due disposizioni (con ripetizioni) equivalenti, allora*

$$\hat{d}_1(P) = \hat{d}_2(P)\ .$$

Infatti, se $e_j \in \hat{d}_1(P)$, allora è $\mu(e_j, \hat{d}_1) \neq 0$ e perciò, per l'equivalenza di $\hat{d}_1$ ed $\hat{d}_2$, $\mu(e_j, \hat{d}_2) \neq 0$, ossia $e_j \in \hat{d}_2(P)$. Perciò, $\hat{d}_1(P) \subseteq \hat{d}_2(P)$. Ma ovviamente il ragionamento si può ripetere invertendo i ruoli di $\hat{d}_1$ ed $\hat{d}_2$, e si ritrova $\hat{d}_2(P) \subseteq \hat{d}_1(P)$. Così il teorema è completemente provato.

Ciò posto, si può dare la seguente

Definizione 7.3. *Assegnati comunque $p \in N$ e $n \in N$, si dice* **combinazione con ripetizioni** *di p (degli n) elementi di E ogni classe di equivalenza di disposizioni con ripetizione degli elementi di E su p posti, rispetto alla relazione definita dalle* (7.1).

Questa definizione dà un'idea precisa della nozione di "combinazione con ripetizioni" e del suo legame con quella di "disposizione con ripetizioni". Ciò stabilito, si deve peraltro rilevare che un calcolo del numero totale delle possibili combinazioni con ripetizioni di p elementi di E, basato sulla Definizione 7.3, risulta troppo complesso per essere eseguito in questa sede. Noi perciò calcoleremo tale numero adottando un metodo più semplice ed intuitivo.

Si immagini di scrivere tutte di seguito le possibili combinazioni con ripetizione di p elementi di E. Detto $\hat{C}_{n,p}$ il loro numero (incognito), poiché ciascuna di esse contiene esattamente p elementi (in generale non tutti distinti), avremo scritto un totale di $p\hat{C}_{n,p}$ elementi. Quante volte figurerà *ciascun* elemento di E nella nostra scrittura?

Convenendo di indicare col simbolo $\hat{C}_{h,k}$ il numero delle combinazioni con ripetizione di k elementi di un insieme che ne contiene h, osserviamo che, fissato comunque un elemento $e_j \in E$, ci saranno $\hat{C}_{n-1,p}$ combinazioni che non contengono e_j. Ci saranno poi $\hat{C}_{n-1,p-1}$ combinazioni che contengono e_j una volta sola, $\hat{C}_{n-1,p-2}$ combinazioni che lo contengono due volte, $\hat{C}_{n-1,p-3}$ che lo contengono tre volte, ..., $\hat{C}_{n-1,1}$ (cioè $n-1$) combinazioni che lo contengono $p-1$ volte e *una sola* combinazione (con ripetizioni) che lo contiene p volte. Ciò si comprende notando che tutte e sole le combinazioni che non contengono e_j sono quelle di p elementi dell'insieme $H = E \backslash \{e_j\}$; le combinazioni che contengono e_j una volta sola, private dell'elemento e_j, risultano invece combinazioni di $p-1$ elementi di H; in generale, le combinazioni nelle quali e_j è contenuto h volte, private dell'elemento e_j, risultano invece combinazioni di $p-h$ elementi di H.

Ciò stabilito, detto n_j il numero di volte in cui figura il simbolo e_j nell'elenco di tutte le combinazioni con ripetizione di p elementi di E, risulta

$$\begin{aligned} n_j &= \hat{C}_{n-1,p-1} + 2\hat{C}_{n-1,p-2} + 3\hat{C}_{n-1,p-3} + \\ &\quad + \ldots + (p-1)\hat{C}_{n-1,1} + p \\ &= \sum_{r=1}^{p-1} r\hat{C}_{n-1,p-r} + p \,. \end{aligned}$$

Questo numero *non dipende* da j, e ciò mostra che, nell'elenco di tutte le combinazioni con ripetizione di p elementi di E, *tutti* gli elementi di E stesso compaiono il medesimo numero di volte. Poiché, come si è detto, abbiamo scritto un totale di $p\hat{C}_{n,p}$ elementi, e gli elementi di E sono n, sarà

$$n_j = \frac{p\hat{C}_{n,p}}{n} \,, \qquad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \,.$$

Si considerino ora — fissato comunque un $e_j \in E$ — tutte e sole le combinazioni di p elementi di E che contengono e_j. Se in ciascuna di esse sopprimiamo *una sola* delle occorrenze di e_j, otteniamo una combinazione di $p-1$ elementi di E. L'elenco di tali combinazioni, che sono $\hat{C}_{n,p-1}$, contiene un totale di $(p-1)\hat{C}_{n,p-1}$ elementi, e, ragionando come prima, e_j vi figurerà $\dfrac{(p-1)}{n}\hat{C}_{n,p-1}$ volte. Ma se ora aggiungiamo a questo numero le $\hat{C}_{n,p-1}$ occorrenze di e_j che avevamo soppresso, otteniamo *esattamente* il numero n_j delle occorrenze di e_j nell'elenco delle combinazioni di p elementi di E. Perciò,

$$
\begin{aligned}
\frac{p\hat{C}_{n,p}}{n} &= \frac{(p-1)}{n}\hat{C}_{n,p-1} + \hat{C}_{n,p-1} = \\
&= \left(\frac{p-1}{n} + 1\right)\hat{C}_{n,p-1} \; .
\end{aligned}
$$

Da ciò segue

$$\hat{C}_{n,p} = \left(\frac{n+p-1}{p}\right)\hat{C}_{n,p-1} \; .$$

È ovvio ora che

$$\hat{C}_{n,1} = n \; ,$$

cosicché

$$
\begin{aligned}
\hat{C}_{n,2} &= \frac{n(n+1)}{2} \; , \\
\hat{C}_{n,3} &= \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3} \; , \\
\hat{C}_{n,4} &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \; ,
\end{aligned}
$$

e, in generale,

$$\hat{C}_{n,p} = \frac{n(n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+p-1)}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p} \ ,$$

ossia, moltiplicando e dividendo ambo i membri di quest'uguaglianza per $(n-1)!$,

$$(7.2) \qquad \hat{C}_{n,p} = \frac{(n+p-1)!}{p![(n+p-1)-p]!} = \binom{n+p-1}{p} \ ,$$

che fornisce, per ogni $n \in N$ e $p \in N$, con $n \neq 1$, il numero delle combinazioni con ripetizione di p elementi di un qualsiasi insieme E di n elementi.

La (7.2) si completa in maniera ovvia per $n = 1$, osservando che, necessariamente,

$$\hat{C}_{1,p} = 1 \ , \qquad \forall \, p \in N \ ,$$

da cui si trae che la (7.2) resta valida anche per $n = 1$.

8. Applicazioni: potenze di un binomio e di un polinomio

Si consideri dapprima un binomio $a+b$. Poiché $a+b \in R$,

$$(a+b)^0 = 1 \qquad \text{e} \qquad (a+b)^1 = a+b\,.$$

$$(a+b)^n = ?$$

$$(8.1) \qquad (a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ volte}}\,.$$

In virtù della distributività della moltiplicazione rispetto all'addizione, tale prodotto si esprimerà come la somma di tutti i possibili prodotti di n fattori ciascuno dei quali coincida con a oppure con b.

Immaginiamo allora i posti dei fattori al secondo membro della (8.1) come una fila di oggetti o "caselle"

$$\overline{\underline{|\, e_1 \,|\, e_2 \,|\, e_3 \,|\ \ \ldots\ \ |\, e_n \,|}}$$

(dove, ovviamente, ogni oggetto si distingue dagli altri per il suo posto nella fila). Per ogni $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$, ogni termine della forma $a^p b^{n-p}$ si ottiene scegliendo p caselle della fila nelle quali sostituire il monomio a, e ponendo b nelle restanti. Perciò, i termini della forma $a^p b^{n-p}$ sono in corrispondenza biettiva con le scelte di p caselle tra le n della fila.

Ad ogni fissato $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$ corrispondono $\binom{n}{p}$ termini del tipo $a^p b^{n-p}$.

Dobbiamo sommare su tutti i valori di p *tutti* i termini che a ciascuna assegnazione di p corrispondono.

Ne consegue la ben nota formula

(8.2)
$$
\begin{aligned}
(a+b)^n = \binom{n}{n} a^n + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b +& \\
+ \binom{n}{n-2} a^{n-2} b + \ldots +& \\
+ \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \binom{n}{0} b^n =& \\
= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} \,,&
\end{aligned}
$$

che normalmente si ricava per induzione su n.

Si deve osservare che esattamente la stessa formula si sarebbe potuta ricavare ragionando sul numero

q delle occorrenze del fattore b nei diversi addendi, e calcolando, per ciascun valore di $q \in \{0, \ldots, n\}$, il numero degli addendi in cui il fattore b compare esattamente q volte. Si può ragionare indifferentemente sul numero p delle occorrenze di a o sul numero q di quelle di b perché ciascuno dei due numeri p e q è univocamente determinato dall'altro e dall'esponente n di $(a+b)^n$ tramite la relazione $p+q=n$. Allora, in virtù del Teorema 5.1, si ha — applicando a b le stesse argomentazioni sopra svolte per a —

$$(a+b)^n = \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} a^{n-q} b^q = \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{n-q} a^{n-q} b^q \ ,$$

la quale, essendo $n-q=p$, non è altro che la (8.2).

Ci proponiamo ora di ricavare, con lo stesso metodo, l'espressione della potenza n-esima di un *polinomio* $c_1 + c_2 + \ldots + c_k$ $(k \geq 3)$. Ancora una volta si ha ovviamente

$$(c_1 + c_2 + \ldots + c_k)^0 = 1$$

e

$$(c_1 + c_2 + \ \dots \ + c_k)^1 = c_1 + c_2 + \ \dots \ + c_k \ ;$$

inoltre, essendo $(c_1 + c_2 + \ \dots \ + c_k)^n$ il prodotto di n fattori identici a $c_1 + c_2 + \ \dots \ + c_k$, ossia

$$\begin{aligned}&(c_1 + c_2 + \ \dots \ + c_k)^n = \\ &= \underbrace{(c_1 + c_2 + \ \dots \ + c_k) \cdots (c_1 + c_2 + \ \dots \ + c_k)}_{n \text{ volte}},\end{aligned}$$

la distributività della moltiplicazione rispetto all'addizione comporta che $(c_1 + c_2 + \ \dots \ + c_k)^n$ sia la somma di tutti i prodotti di n fattori scelti nell'insieme $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$. Possiamo inoltre scrivere

$$(c_1 + c_2 + \ \dots \ + c_k)^n = [c_1 + (c_2 + \ \dots \ + c_k)]^n \ ,$$

ed applicando la (8.2), risulterà

$$\begin{aligned}&(c_1 + c_2 + \ \dots \ + c_k)^n = \\ &= \sum_{n_1=0}^{n} \binom{n}{n_1} c_1^{n_1} (c_2 + \ \dots \ + c_k)^{n-n_1} \ .\end{aligned}$$

Ma ora è

$$(c_2 + \,\ldots\, + c_k)^{n-n_1} = [c_2 + (c_3 + \,\ldots\, + c_k)]^{n-n_1} =$$
$$= \sum_{n_2=0}^{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} c_2^{n_2} (c_3 + \ldots + c_k)^{n-n_1-n_2} \,,$$

talché

$$(c_1 + c_2 + \,\ldots\, + c_k)^n =$$
$$= \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \times$$
$$\times\, c_1^{n_1} c_2^{n_2} (c_3 + \,\ldots\, + c_k)^{n-n_1-n_2} \,.$$

Iterando questo ragionamento, ci rendiamo subito conto che

(8.3)

$$(c_1 + c_2 + \,\ldots\, + c_k)^n =$$
$$= \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \cdots \sum_{n_{k-1}=0}^{n-\sum_{j=1}^{k-2} n_j} \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \times \cdots$$
$$\cdots \times \binom{n-\sum_{j=1}^{k-2} n_j}{n_{k-1}} c_1^{n_1} c_2^{n_2} c_3^{n_3} \cdots c_k^{n-\sum_{j=1}^{k-1} n_j} \,.$$

Ma ora, ponendo $n_k = n - \sum_{j=1}^{k-1} n_j$, vediamo subito che in ogni addendo dello sviluppo al secondo membro della (8.3) deve risultare $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, e che le $k-1$ sommatorie che ivi compaiono possono essere sostituite da un'unica sommatoria nella quale a ciascun esponente è consentito variare da 0 a n, ma in maniera tale che questa condizione sia soddisfatta. Perciò la (8.3) assumerà la forma

$$
\begin{aligned}
&(c_1 + c_2 + c_3 + \ \ldots + c_k)^n = \\
&= \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_k = 0 \\ n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n}}^{n} \binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2} \times \cdots \\
&\cdots \times \binom{n - \sum_{j=1}^{k-2} n_j}{n_{k-1}} c_1^{n_1} c_2^{n_2} c_3^{n_3} \cdots c_k^{n_k} \,.
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

Dobbiamo ora osservare che, posto

$$
\begin{aligned}
&N(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}) = \\
&= \binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2} \cdots \binom{n - \sum_{r=1}^{i} n_r}{n_{i+1}} \times \\
&\times \ldots \times \binom{n - \sum_{r=1}^{k-2} n_r}{n_{k-1}} \,,
\end{aligned}
$$

si ha

$$N(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}) =$$
$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \times \ldots$$
$$\ldots \times \frac{(n-\sum_{r=1}^{i} n_r)!}{n_i!(n-\sum_{r=1}^{i+1} n_r)!} \ldots \frac{(n-\sum_{r=1}^{k-2} n_r)!}{n_{k-1}!n_k!} ,$$

onde, semplificando i fattori comuni a numeratore e denominatore,

$$N(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!} .$$

Sostituendo questa espressione nella (8.4) si trova
(8.5)
$$(c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_k)^n =$$
$$= \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n}^{0,\ldots,n} \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!} c_1^{n_1} c_2^{n_2} c_3^{n_3} \ldots c_k^{n_k} ,$$

che fornisce lo sviluppo cercato.

Si osserverà che il numero $N(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}) = N(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ *non è* il numero di *tutti* i termini che contengono c_1 esattamente n_1 volte, ma il numero di tutti e soli quelli fra essi che contengono c_2 esattamente n_2 volte, c_3 esattamente n_3 volte, ... , e c_k esattamente n_k volte.

Osservazione 8.1

Allo stesso modo che per le disposizioni con ripetizione di due elementi, applicando la (8.5) a un polinomio i cui termini siano tutti uguali a 1, si ha

$$n^p = \sum_{p_1+p_2+\,\dots\,+p_n=p}^{0,\,\dots\,,p} \frac{p!}{p_1!p_2!p_3!\dots p_n!}\,, \tag{8.6}$$

(con ovvia sostituzione dei simboli rispetto alla (8.5)). Il primo membro della (8.6) è il numero delle disposizioni con ripetizione di n elementi e_1, e_2, ... , e_n su p posti, e ciascun addendo a secondo membro rappresenta il numero di tali disposizioni sotto la condizione che e_1 sia ripetuto esattamente p_1 volte, e_2 lo sia p_2 volte, ... , ed e_n sia ripetuto esattamente p_n volte (ossia interpretando ciascun p_i come molteplicità — *imposta* o *vincolata* — del corrispondente e_i).

Denotiamo ora con $\Omega \equiv \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p\}$ l'insieme dei posti. Assegnare a p_h ripetizioni dell'elemento

e_h i posti ω_{h_1}, ω_{h_2}, …, $\omega_{h_{p_h}}$ significa associare ad e_h un sottoinsieme P_h di Ω. Si consideri allora una *qualsiasi* applicazione f definita in Ω e a valori nell'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ (questa, a meno della sostituzione $h \to e_h$, è la stessa cosa di un'applicazione di Ω nell'insieme E degli e_h). Per ogni $h \in \{1, 2, \ldots, n\}$, interpretiamo la controimmagine $P_f(h)$ di h tramite la f come l'insieme delle posizioni assegnate alle ripetizioni di h (ossia e_h). In tal modo riconosciamo che n^p è la cardinalità dell'insieme $F_n(\Omega)$ di tutte le possibili applicazioni di Ω in $\{1, 2, \ldots, n\}$.