

Capitolo 2

I materiali delle costruzioni in cemento armato

2.1 Le costruzioni in cemento armato

Con l'introduzione, alla fine del XIX secolo, del ferro nella realizzazione delle strutture, la tecnologia delle costruzioni, fino ad allora basata sulla muratura, subì una profonda rivoluzione. Questa nuova tecnologia cambiò non solo le metodologie costruttive, ma influì anche sullo sviluppo delle scienze applicate alle costruzioni.

Per le costruzioni murarie, caratterizzate da un materiale dotato di scarsa resistenza a trazione, il problema che più spesso si pone è quello di realizzare delle configurazioni equilibrate, piuttosto che degli elementi sufficientemente resistenti, come è confermato dalla maggior parte dei contributi teorici del secolo precedente. Al contrario le costruzioni in ferro (e quelle in cemento armato, che nasceranno successivamente) di solito non presentano problemi di equilibrio, garantito da vincoli spesso sovrabbondanti, ma presentano problemi di resistenza in quanto, essendo ora questa affidata a parti distinte da quelle funzionali, gli elementi resistenti devono essere dimensionati unicamente in vista della loro funzione.

Questi fatti, e la semplicità dei legami costitutivi dei materiali ferrosi, diedero impulso allo sviluppo della meccanica dei solidi, in particolare alla teoria dell'elasticità e, più tardi, a quella della plasticità.

Il costo elevato e la necessità di utilizzare tecniche esecutive più complesse, fecero sì che l'impiego del ferro (acciaio) nelle costruzioni civili rimase limitato alle opere di maggiore impegno (ponti, coperture di grande luce, edifici alti, ecc . . .), mentre nell'edilizia comune la muratura restò, fino all'introduzione del cemento armato, la tecnica costruttiva prevalente.

Con il diffondersi del *cemento armato* la muratura è stata soppiantata anche negli impieghi dell'edilizia minuta. Negli anni il campo di applicazione del cemento armato si è andato allargando sia a scapito dell'acciaio nelle opere importanti, sia a scapito della muratura, in quelle più comuni. In effetti il cemento armato riunisce, almeno in parte, i pregi della muratura e del ferro: della prima ha il basso costo, la semplicità esecutiva, una scarsa sensibilità ad alcuni agenti esterni (corrosione, fuoco), del secondo, sia pure in misura più limitata, ha la resistenza elevata e, soprattutto, la capacità di resistere alle sollecitazioni di trazione, ciò che consente di realizzare quegli elementi, quali travi, sbalzi, ecc . . . , impossibili in muratura.

Il cemento armato si realizza unendo due materiali diversi: *il calcestruzzo e l'acciaio*. L'acciaio viene impiegato in percentuale (di solito) modesta sotto forma di barre di sezione più o meno circolare di diametro relativamente piccolo (≤ 30 mm), poste principalmente nelle zone che si prevede saranno soggette a trazione, seguendo approssimativamente l'andamento delle linee isostatiche. Il calcestruzzo è un materiale artificiale di tipo lapideo che si ottiene mescolando in dosi opportune degli inerti naturali (sabbia, ghiaia o pietrisco)¹ con acqua e cemento, che ha la funzione di legante dell'impasto.

Il termine *cemento armato*, usato in Italia, è impreciso in quanto il cemento ha solo la funzione di legante, mentre l'impasto viene detto *conglomerato* o *calcestruzzo*. Sarebbe più corretto usare il termine "calcestruzzo armato", come nella maggior parte delle lingue straniere (*reinforced concrete*, *béton armé*, *hormigon armado*), ma la dizione cemento armato è ormai parte della lingua ufficiale.

2.2 Il calcestruzzo

Come accennato le strutture in cemento armato (c.a.) sono realizzate in calcestruzzo opportunamente rinforzato da un'armatura di acciaio, generalmente in barre. Il materiale quantitativamente dominante è quindi il calcestruzzo, materiale artificiale che si ottiene impastando degli inerti naturali con un legante, il cemento, le cui reazioni chimiche sono rese possibili dalla presenza di acqua.

2.2.1 Composizione del calcestruzzo

I componenti di un calcestruzzo sono: gli **inerti**, il **cemento** e l'**acqua**. Gli **inerti** formano lo "scheletro" lapideo del calcestruzzo, tenuto insieme dal **cemento**. L'**acqua** serve sia a rendere possibili le reazioni chimiche della *presa* del cemento, sia a conferire all'impasto la *fluidità* necessaria a consentirne la lavorabilità.

Il cemento

Il cemento (di tipo Portland) si ottiene cuocendo ad alta temperatura (1400 – 1500 °C) una miscela di calcare ed argilla (nella proporzione di circa 1:3) e quindi macinando finemente il prodotto di cottura (Klinker). Diversi tipi di cemento si ottengono modificandone la composizione: aggiungendo pozzolana si ottiene il *cemento pozzolanico*, con l'aggiunta di loppa d'alto forno si ottiene il *cemento d'alto forno*, ecc ...

Dal punto di vista chimico il cemento è una miscela di silicati ed alluminati di calcio che, anche in virtù della finissima macinazione, sono in grado di reagire rapidamente con l'acqua formando una massa dura, simile alla pietra.

In un calcestruzzo, generalmente, il legame tra gli inerti fornito dal cemento è l'elemento di minor resistenza. Pertanto la resistenza del calcestruzzo è fortemente dipendente dalla qualità e dalla quantità di cemento impiegato. Oltre certi limiti tuttavia, all'aumentare del quantitativo di cemento i guadagni di resistenza divengono sempre più modesti, mentre si evidenziano degli effetti negativi dovuti all'eccesso di cemento.

¹Gli inerti "grossi" (ghiaia o pietrisco) si possono sostituire con inerti artificiali, generalmente ottenuti per cottura di materiali argillosi. In questo modo si ottengono dei *calcestruzzi leggeri*, con peso specifico, ma anche resistenza, inferiori a quelli dei calcestruzzi ordinari.

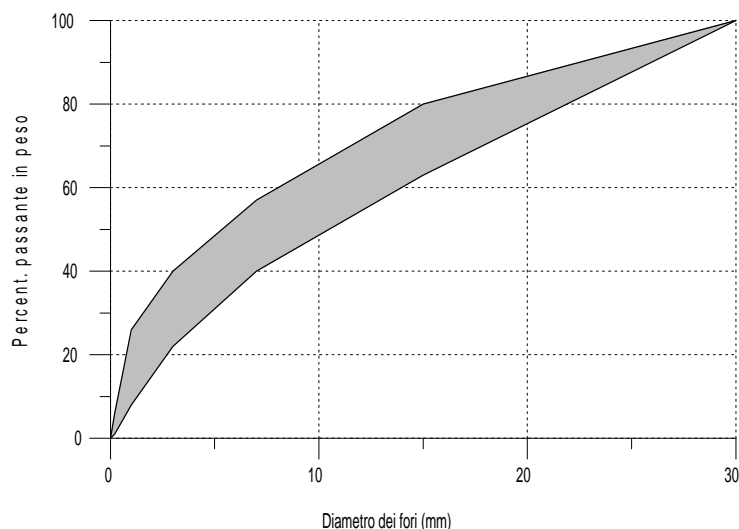


Figura 2.1: Fuso di Fuller

Gli inerti

Gli inerti formano lo scheletro solido del calcestruzzo e ne costituiscono la percentuale prevalente in peso e volume: la loro qualità è determinante per la buona riuscita del calcestruzzo.

Gli inerti devono riempire al massimo i vuoti dell'impasto, onde rendere minimo il volume occupato dal cemento. A questo scopo si usano inerti di diverso diametro:

- Inerti a grana grossa (ghiaia o pietrisco)
- Inerti a grana fine (sabbia)

Generalmente gli inerti fini sono a loro volta composti da una sabbia grossa ed una fine.

Per ottenere un buon calcestruzzo occorre che la miscela di inerti abbia una corretta granulometria, ottenuta mescolando in proporzioni opportune inerti di tipo diverso. Il controllo della granulometria si fa tracciando la *curva granulometrica* della miscela, che si ottiene riportando in un diagramma, in funzione del diametro, la percentuale in peso degli inerti passanti in crivelli con fori di diametro crescente. Un criterio valido per giudicare della qualità della curva consiste nel verificare che essa sia contenuta all'interno di una zona (*fuso di Fuller*) ottenuta empiricamente.

L'influenza degli inerti sulla qualità dell'impasto è ovviamente legata anche alle loro qualità intrinseche: gli inerti grossi non devono essere costituiti da rocce tenere di bassa resistenza, mentre le sabbie dovrebbero essere di tipo siliceo piuttosto che calcareo. Inoltre gli inerti devono essere ben "puliti", cioè privi di argilla e materie organiche che, interponendosi, possono ostacolare l'aderenza tra il cemento e l'inerte.

Cemento	250 – 350 kg
Inerti fini (sabbia)	0.4 m ³
Inerti grossi (ghiaia)	0.8 m ³
Acqua	100 – 200 l

Tabella 2.1: Composizione media di un metro cubo di calcestruzzo

L'acqua

L'acqua, combinandosi con il cemento nel fenomeno dell'idratazione, dà luogo alla “presa” che trasforma l'impasto in una massa solida. Tuttavia l'acqua deve svolgere anche la funzione di lubrificante nell'impasto, rendendolo sufficientemente fluido da essere lavorabile. Per questo motivo l'acqua impiegata nell'impasto deve essere in quantità superiore a quella strettamente necessaria per l'idratazione del cemento. Peraltro si deve tenere presente che all'aumentare dell'eccesso di acqua peggiorano sensibilmente le caratteristiche meccaniche del calcestruzzo.

L'acqua da usare nell'impasto deve essere il più possibile pura, quando è possibile si consiglia quindi l'uso di acqua potabile. In particolare devono essere evitate acque contenenti percentuali elevate di solfati e le acque contenenti rifiuti di origine organica o chimica. La presenza di impurità infatti interferisce con la presa, provocando una riduzione della resistenza del conglomerato.

Composizione quantitativa del calcestruzzo

La proporzione dei componenti impiegati nella composizione di un calcestruzzo varia sensibilmente da caso a caso, per effetto delle caratteristiche degli inerti disponibili e delle prestazioni che si prevede di ottenere dal calcestruzzo. In particolare per calcestruzzi di resistenza elevata, oltre a curare la natura e la composizione degli inerti, si dovranno impiegare quantitativi elevati di cemento.

La seguente tabella fornisce dei quantitativi indicativi della composizione di un calcestruzzo medio:

2.2.2 Fattori che influenzano le caratteristiche meccaniche del calcestruzzo

Molti fattori, spesso difficili da controllare accuratamente, hanno influenza sulle caratteristiche meccaniche dei calcestruzzi. Di alcuni, legati alla qualità ed alla quantità dei componenti, si è già detto; a questi si possono aggiungere le condizioni ambientali (temperatura e umidità) in cui si svolge la presa, che pure hanno notevole influenza sul risultato.

Nel seguito si elencano brevemente i fattori più rilevanti di entrambi i tipi:

1. **Quantità di cemento.** La resistenza del calcestruzzo aumenta quasi proporzionalmente al quantitativo di cemento impiegato; tuttavia dosi eccessive ($> 500 \text{ kg/m}^3$) sono inutili o addirittura dannose.
2. **Inerti.** Gli inerti devono essere di buona qualità, puliti e dosati accuratamente. Si deve tener presente che la causa più frequente di cattivi risultati ottenuti nella realizzazione dei calcestruzzi è proprio legata all'uso di inerti scadenti o sporchi.

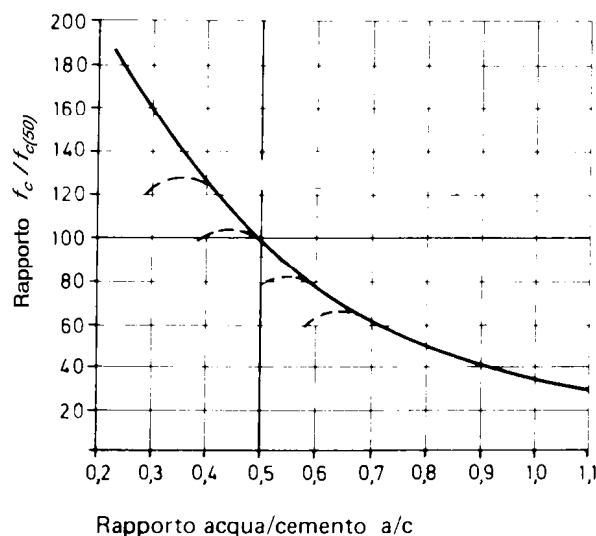


Figura 2.2: Resistenza del calcestruzzo in funzione del rapporto acqua-cemento

3. **Rapporto acqua-cemento.** La quantità minima di acqua richiesta dalla reazione chimica dell'idratazione del cemento è di circa 0.27 litri di acqua per ogni chilogrammo di cemento (rapporto acqua-cemento $a/c = 0.27$). I valori del rapporto a/c comunemente usati sono sensibilmente superiori, al fine di rendere lavorabile l'impasto. Tuttavia l'aumento di acqua rispetto al minimo stechiometrico dà luogo ad una progressiva riduzione della resistenza del calcestruzzo (vedi fig. 2.2).

Il dosaggio dell'acqua non può tuttavia scendere sotto certi livelli, altrimenti il calcestruzzo risulta non lavorabile, a meno di non usare opportuni accorgimenti, quali l'aggiunta nell'impasto di additivi fluidificanti. Una tecnica comunemente usata per migliorare la lavorabilità di getti poco fluidi consiste nella vibrazione, applicata alle casseforme o direttamente nei getti mediante opportuni apparati (vibratori). Valori usuali per getti in opera del rapporto acqua-cemento sono compresi tra 0.4 e 0.5.

La fluidità, e quindi la lavorabilità del getto di calcestruzzo viene misurata mediante il *cono di Abrams* (fig. 2.3), specie di secchio privo di fondo con forma tronco-conica e dimensioni standard che, dopo essere stato riempito di calcestruzzo e costipato secondo una procedura codificata, viene rimosso, scassando il getto. La misura dell'abbassamento del calcestruzzo fornisce un'indicazione della sua fluidità, secondo la seguente scala:

0 ÷ 5 cm	Calcestruzzo asciutto
5 ÷ 10 cm	Calcestruzzo plastico
> 10 cm	Calcestruzzo fluido

4. **Condizioni ambientali** Il fenomeno della presa risulta molto accelerato se avviene in ambiente caldo-umido. Questa proprietà è utilizzata, specialmente negli stabilimenti di prefabbricazione, per accelerare i tempi di presa e di indurimento,

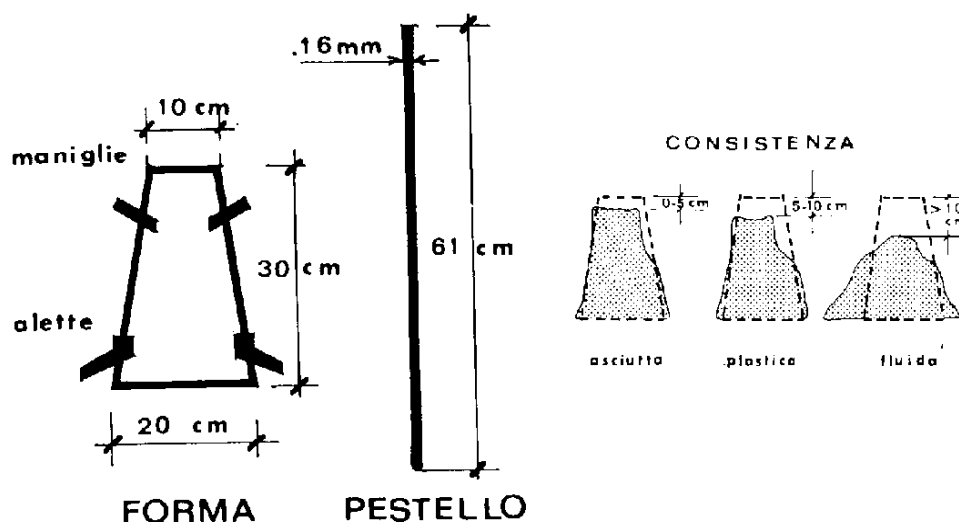


Figura 2.3: Cono di Abrams

mediante stagionatura in ambienti caldi e saturi di vapore (*maturazione a vapore*), il che consente di scasserare i getti dopo poche ore.

Al contrario il caldo secco è dannoso in quanto, provocando l'evaporazione dell'acqua dagli strati superficiali, impedisce lo sviluppo della presa; nelle ore calde dei mesi estivi è opportuno mantenere i getti bagnati, mediante annaffiamento, onde evitare il pericolo dell'evaporazione dell'acqua inclusa nel getto.

Il gelo è sicuramente dannoso; oltre a rallentare il tempo di presa, se sussistono le condizioni per la formazione di ghiaccio, l'acqua del getto, gelando, impedisce l'idratazione e rompe i legami già formati tra la pasta cementizia e gli inerti, producendo calcestruzzi di infima qualità (calcestruzzo "bruciato").

Il fenomeno dell'*indurimento*, cioè l'aumento di resistenza del calcestruzzo, si protrae per molto tempo (uno o due anni); tuttavia in un tempo assai minore si raggiunge una percentuale ragionevole della resistenza finale. La velocità iniziale con cui aumenta la resistenza varia molto con la temperatura: a temperatura ambiente (circa 20 °C) l'80% della resistenza finale si raggiunge in circa 20 giorni, mentre in caso di maturazione a vapore lo stesso valore viene raggiunto in appena due o tre giorni.

2.2.3 Caratteristiche meccaniche del calcestruzzo

La resistenza del calcestruzzo si misura mediante prove sperimentali; la prova di uso comune è quella di compressione semplice (monoassiale) di provini di forma cilindrica o cubica. La forma del provino influenza il valore della resistenza misurata: pertanto i campioni debbono avere caratteristiche standard. I provini cilindrici generalmente hanno l'altezza $h = 30$ cm ed il diametro della base $D = 15$ cm (rapporto $h/D = 2$); i provini cubici normalmente hanno lo spigolo di lunghezza compresa tra 15 e 20 cm.

Il diagramma tensioni-deformazioni del calcestruzzo compresso è illustrato in fig. 2.4 per calcestruzzi di caratteristiche diverse. Osservando queste curve si nota l'assenza di un vero tratto a comportamento lineare; la curvatura aumenta gradualmente fin quando la

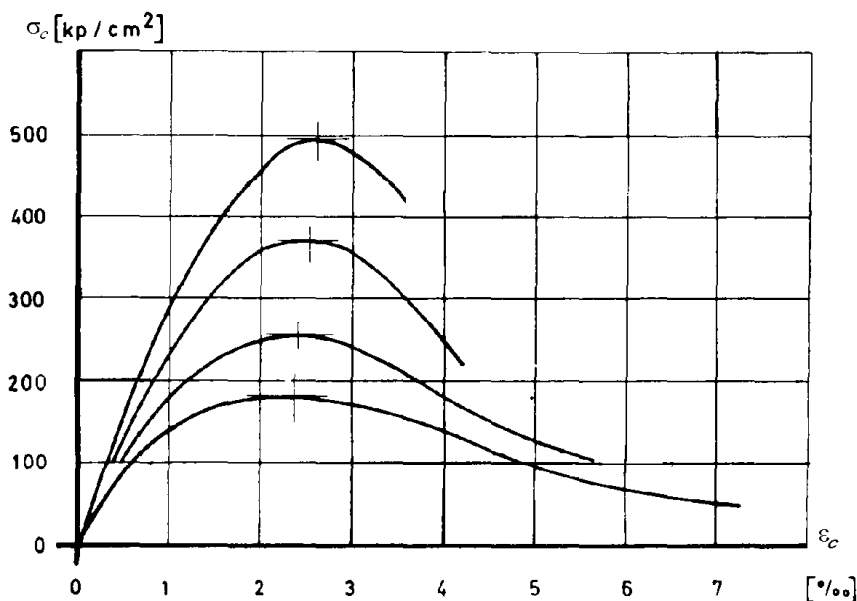


Figura 2.4: Curve Tensione-Deformazione di calcestruzzi di differente qualità

curva raggiunge l'ordinata massima f_c , il cui valore definisce la *resistenza a compressione* del calcestruzzo. Questo valore si raggiunge per una deformazione ϵ_{c1} , oltre la quale la tensione diminuisce al crescere della deformazione, fino alla rottura che si raggiunge per il valore ϵ_{cu} della deformazione.

Mancando un chiaro tratto lineare si è soliti definire un *modulo elastico convenzionale* E_c , definito come il modulo secante in corrispondenza della tensione $0.4f_c$. Come si vede dalla fig. 2.4 il modulo elastico del calcestruzzo cresce con la resistenza f_c ; al contrario la deformazione di rottura ϵ_{cu} diminuisce mentre cresce la pendenza (negativa) del ramo instabile; in altre parole al crescere della resistenza il calcestruzzo diviene più *fragile*.

Il legame costitutivo in compressione monoassiale del calcestruzzo si può approssimare con diverse espressioni analitiche. La bozza di Norme Europee per il cemento armato (EC2) propone la seguente:

$$\sigma_c = f_c \frac{(k\eta - \eta^2)}{[1 + (k - 2)\eta]} \quad (2.1)$$

in cui:

$$\eta = |\epsilon_c / \epsilon_{c1}|$$

$$k = 1.1 E_c |\epsilon_{c1} / f_c|$$

Il valore assoluto della deformazione ϵ_{c1} a cui corrisponde il raggiungimento della resistenza f_c si assume pari a 2.2×10^{-3} .

Come si è già detto il modulo elastico E_c dipende dalla resistenza f_c , ma l'esperienza dimostra che vi è una forte dispersione dei risultati. In assenza di altre informazioni la Normativa Italiana suggerisce di assumere:

$$E_c = 5700 \sqrt{R_{ck}} \quad (\text{N/mm}^2) \quad (2.2)$$

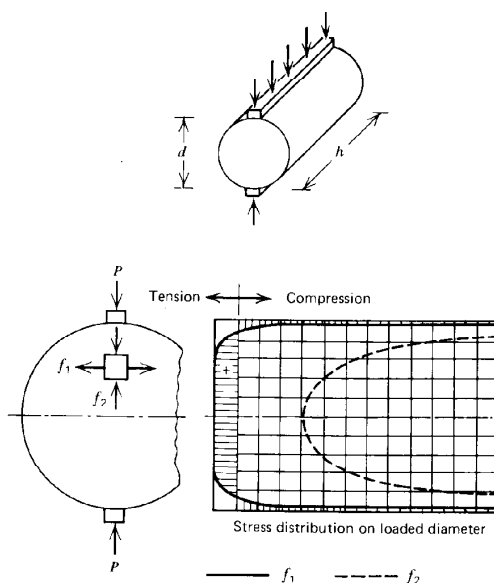


Figura 2.5: Schema della prova “Brasiliana”

in cui R_{ck} indica *resistenza caratteristica cubica*, che sarà definita in seguito.

La bozza di normativa europea (EC2) fornisce invece una relazione discreta, riportata nella seguente tabella:

Classe	C12/15	C16/20	C20/25	C25/30	C30/37
E_c	26	27.5	29	30.5	32
Classe	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60	
E_c	33.5	35	36	37	

in cui E_c è espressa in kN/mm^2 e la classe del calcestruzzo indica la *resistenza caratteristica cilindrica* f_{ck} e quella cubica R_{ck} , espressa in N/mm^2 . Secondo la norma italiana si può passare dalla resistenza cubica a quella cilindrica mediante la relazione:

$$f_{ck} = 0.83R_{ck} \quad (2.3)$$

Resistenza a trazione

Come tutti i materiali lapidei, il calcestruzzo ha una resistenza a trazione assai minore di quella a compressione. Sebbene in certe analisi il calcestruzzo possa essere modellato come un materiale privo di resistenza a trazione, in realtà questa resistenza condiziona in modo importante il comportamento degli elementi in cemento armato.

A causa dei modesti valori che questa grandezza raggiunge, la registrazione sperimentale della legge $\sigma - \epsilon$ del calcestruzzo teso è operazione delicata. Data la difficoltà ad eseguire prove di trazione pura, la resistenza a trazione si misura di solito mediante prove indirette, come la prova su cilindro sollecitato a taglio (prova brasiliana). In tal caso (vedi fig. 2.5) la resistenza a trazione si calcola con la relazione:

$$f_{ct} = \frac{2P}{\pi l D} \quad (2.4)$$

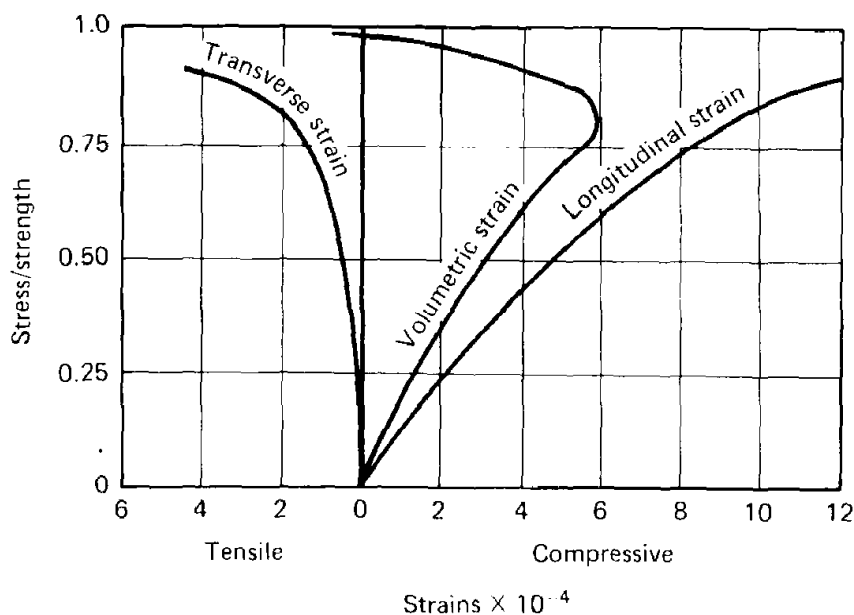


Figura 2.6: Curve tensione-deformazione del calcestruzzo compresso

in cui P è il carico di rottura, D è il diametro di base ed l l'altezza del provino cilindrico.

In alternativa la resistenza a trazione si può misurare mediante una prova a flessione su di una barretta di calcestruzzo di dimensioni standard. Caricando il provino con due forze simmetriche P distanti a dagli appoggi, se b ed h indicano la base e l'altezza della sezione della trave, ipotizzando un comportamento lineare-fragile si ha:

$$f_{cf} = \frac{6Pa}{bh^2} \quad (2.5)$$

dove f_{cf} è detta *resistenza a trazione per flessione*. Tale resistenza risulta generalmente più alta di quella misurata con la prova di taglio; mediamente si ha:

$$f_{cf} = 1.2f_{ct} \quad (2.6)$$

Deformazione trasversale

Il rapporto tra la deformazione assiale (nella direzione dell'asse di sollecitazione) e quella trasversale è dato, per i solidi elastici, dal *coefficiente di Poisson*. Per il calcestruzzo, nel campo dei valori delle tensioni piccoli rispetto a quelli di rottura, il coefficiente di Poisson risulta normalmente compreso tra 0.15 e 0.20. Al crescere della tensione le deformazioni trasversali aumentano rapidamente in modo tale che la deformazione volumetrica ($\theta = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$), dopo aver raggiunto un valore massimo decresce e, in prossimità del collasso del materiale ($\epsilon \sim \epsilon_{cu}$), prende valori negativi, come mostrato nella fig. 2.6.

Stati di tensione pluriassiali

In molti casi il calcestruzzo risulta soggetto a sollecitazioni composte (bi- o tri-assiali): ad esempio nelle sezioni delle travi sollecitate a flessione e taglio si ha uno stato di tensioni normali e tangenziali.

Per il caso generale del calcestruzzo soggetto a tensioni triassiali non si dispone di modelli teorici del tutto soddisfacenti. Uno dei criteri più antichi, che si accorda qualitativamente con il comportamento dei materiali fragili, è quello di *Mohr-Coulomb* o della massima tensione tangenziale. Secondo questo criterio, indicando con

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$$

le tensioni principali corrispondenti allo stato di sollecitazione considerato, si raggiunge il collasso quando la tensione tangenziale massima $\tau_{max} = (\sigma_3 - \sigma_1)/2$ prende un valore che è funzione della sola tensione media $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$, ossia:

$$(\tau_{max})_r = F_r \left(\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)$$

Le previsioni del modello di Mohr sono verificate solo qualitativamente dal calcestruzzo; in particolare per stati di tensione biassiali, per il qual caso si hanno risultati sperimentali attendibili, se entrambe le componenti non nulle sono di compressione, il modello di Mohr, non tenendo conto del valore della tensione intermedia, prevede che la resistenza non vari rispetto a quella di compressione semplice. Il confronto con la curva ricavata da dati sperimentali (Fig. 2.7) mostra che questo si verifica solo approssimativamente in quanto la tensione di rottura biassiale cresce di oltre il 20% rispetto a quella di compressione semplice.

Un caso particolare di sollecitazione triassiale è quella in cui due delle componenti del tensore principale sono uguali tra loro; sottoponendo il cilindro ad una pressione radiale di tipo idrostatico e facendo crescere la pressione assiale fino a rottura, si osserva che quest'ultima cresce sensibilmente all'aumentare della pressione radiale. Sulla base di prove di questo tipo Richart ed al. hanno proposto la seguente relazione per valutare la tensione di rottura del calcestruzzo soggetto ad una pressione idrostatica di confinamento:

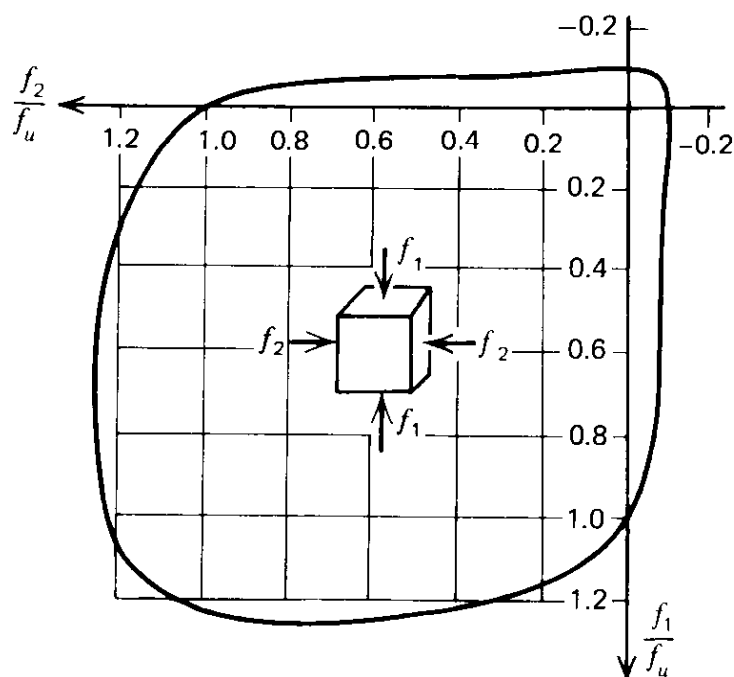
$$f_{cc} = f_c + 4.1\sigma_l \quad (2.7)$$

in cui f_c è la resistenza del calcestruzzo non confinato e σ_l è la pressione laterale di confinamento.

Le stesse esperienze hanno messo in evidenza che il confinamento non soltanto innalza il valore della resistenza del calcestruzzo ma inoltre ne aumenta la deformazione ultima ϵ_{cu} e produce una riduzione della pendenza del ramo discendente, ossia migliora il comportamento post-elastico (duttile) del materiale.

2.2.4 Comportamento del calcestruzzo confinato

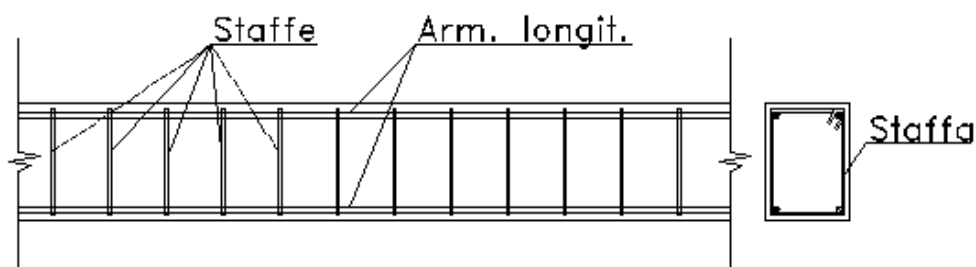
Nelle strutture in cemento armato il calcestruzzo, come si è detto, viene opportunamente rinforzato mediante barre di acciaio. Nelle travi queste barre sono disposte longitudinalmente, di solito in prossimità della superficie. Oltre a questa armatura longitudinale viene anche impiegata un'*armatura trasversale* (staffe), formata da barre sagomate in modo da essere iscritte nel perimetro esterno della sezione e da racchiudere al loro interno le barre longitudinali (vedi Fig. 2.8).



Figura~2.7: Dominio di resistenza del calcestruzzo per stati di tensione biassiali

L'armatura trasversale svolge diversi ruoli, di cui si dirà diffusamente nel seguito; qui si osserva che le staffe, se abbastanza fitte e opportunamente conformate, possono svolgere il ruolo di confinare il calcestruzzo. Infatti quando la tensione assiale si avvicina a quella di collasso la deformazione trasversale del calcestruzzo diviene molto grande e le staffe, ostacolando questa deformazione, provocano l'insorgere di tensioni di coazione simili a quelle idrostatiche: ne deriva un aumento della resistenza a schiacciamento e della duttilità del calcestruzzo.

Nelle applicazioni, poichè l'armatura è normalmente presente, è utile disporre di una



Figura~2.8: Schema dell'armatura di un elemento in c.a.

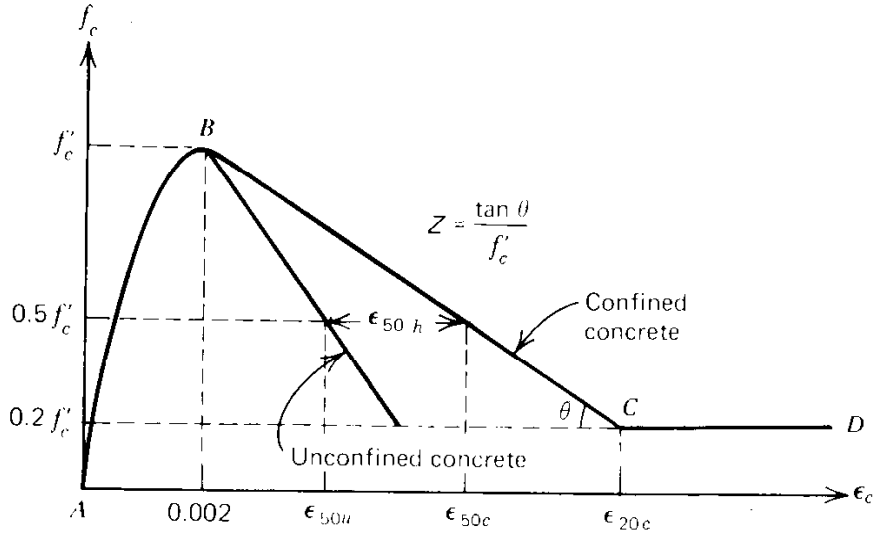


Figura 2.9: Curva tensione-deformazione del calcestruzzo confinato, secondo il modello di Kent e Park

legge tensioni-deformazioni per il calcestruzzo confinato mediante armatura trasversale. Kent e Park hanno proposto una legge schematica che corregge quella del calcestruzzo libero in funzione dell'armatura trasversale.

I dati sperimentali da cui questa legge è ricavata non hanno evidenziato un sensibile aumento della resistenza a compressione del calcestruzzo confinato con staffe rettangolari² ma da essi risulta un netto miglioramento della duttilità, sia in termini di allungamento massimo sia in termini di pendenza del ramo instabile. La curva di Kent e Park, mostrata in Fig. 2.9, è formata da tratto ascendente parabolico fino al raggiungimento resistenza f_c per la deformazione $\epsilon_{c1} = 2 \times 10^{-3}$, seguito da un tratto lineare decrescente fino al valore di una resistenza residua $0.2f_c$, che si assume permanga per qualunque deformazione.

La parabola del ramo ascendente ha equazione:

$$\sigma_c = 2f_c \left[\left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right)^2 \right] \quad (\epsilon_c \leq \epsilon_{c1}) \quad (2.8)$$

mentre il tratto lineare è:

$$\sigma_c = f_c [1 - z(\epsilon_c - \epsilon_{c1})] \quad (\epsilon_{c1} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{c20}) \quad (2.9)$$

in cui ϵ_{c20} è la deformazione corrispondente a $\sigma_c = 0.20f_c$; l'inclinazione z è data dalla relazione:

$$z = \frac{0.5}{\epsilon_{50u} + \epsilon_{50h} - \epsilon_{c1}} \quad (2.10)$$

in cui:

$$\epsilon_{50u} = \frac{0.0207 + \epsilon_{c1} f_c}{f_c - 6.89} \quad (2.11)$$

²In questo senso l'effetto del contenimento si evidenzia solo nel caso di staffe circolari, disposte a spirale e con un passo abbastanza fitto

e

$$\epsilon_{50h} = \frac{3}{4} \rho_s \sqrt{\frac{b''}{s_h}} \quad (2.12)$$

Nell'eq. (2.11) la resistenza del calcestruzzo, f_c , è espressa in N/mm^2 , mentre, nell'eq. (2.12), ρ_s indica la percentuale in volume dell'armatura trasversale rispetto al nucleo del calcestruzzo confinato, b'' è la larghezza della sezione della zona confinata ed s_h è l'interasse tra le staffe.

Esempio 2.1 Per una sezione $30 \times 30 \text{ cm}^2$ con nucleo confinato $25 \times 25 \text{ cm}^2$ e staffe di diametro $\phi = 8 \text{ mm}$ ($A = 0.5 \text{ cm}^2$), con interassi di 5 – 10 e 15 cm, assumendo $f_c = 30 \text{ N}/\text{mm}^2$, si ottiene:

$$\epsilon_{50u} = \frac{0.0207 + 0.002 \times 30}{30 - 6.89} = 0.0035$$

Indicando con ρ_{s1} la percentuale di armatura corrispondente ad un passo di 1 cm, si ha:

$$\rho_{s1} = \frac{0.5 \times 25 \times 4}{25 \times 25} = 0.08$$

e quindi:

passo st.	5	10	15
ρ_s	0.016	0.008	0.0053
ϵ_{50h}	0.0268	0.0095	0.0051
z	17.688	45.454	75.757
ϵ_{c20}	0.0437	0.0196	0.0126

A titolo di confronto si osservi che per il calcestruzzo non confinato si ha $\epsilon_{c20} = 0.0044$. \square

2.2.5 Deformazioni lente

Dopo l'applicazione del carico, subita la deformazione elastica istantanea, la maggior parte dei materiali continuano nel tempo a deformarsi; in caso di carico costante la deformazione tende verso un valore asintotico che si raggiunge, idealmente, dopo un tempo infinito dall'istante di applicazione del carico. Questo tipo di comportamento è detto *viscoso*.

Oltre alla viscosità il calcestruzzo manifesta un altro fenomeno che evolve nel tempo: il *ritiro*. Il ritiro è una diminuzione di volume della massa di calcestruzzo, dovuta essenzialmente alla lenta evaporazione dell'acqua in eccesso rimasta imprigionata nel getto; diversamente dalle deformazioni viscosi, che dipendono dall'intensità del carico, il ritiro è, per un certo calcestruzzo e per assegnate condizioni ambientali, funzione solamente dell'età del materiale. Anche in questo caso la deformazione cresce nel tempo tendendo ad un valore asintotico, detto *deformazione di ritiro a tempo infinito*.

Le deformazioni lente possono influenzare sensibilmente il comportamento degli elementi in cemento armato; in particolare il ritiro, quando è ostacolato da vincoli interni od esterni, genera uno stato di coazione per cui le tensioni di trazione possono facilmente superare la (modesta) resistenza del materiale e provocare il formarsi di lesioni. Per questo motivo negli elementi in calcestruzzo è sempre opportuno disporre un certo quantitativo di armatura, anche in quelli in cui i carichi non inducono sollecitazioni di trazione.

Di solito gli effetti delle deformazioni lente non vengono analizzati accuratamente: di essi si tiene conto in modo forfettario, riducendo opportunamente il modulo elastico

t_0 (giorni)	U.R. = 75%		U.R. = 55%	
	$\alpha \leq 20$ cm	$\alpha \geq 60$ cm	$\alpha \leq 20$ cm	$\alpha \geq 60$ cm
1 ÷ 7	0.26×10^{-3}	0.21×10^{-3}	0.43×10^{-3}	0.31×10^{-3}
8 ÷ 60	0.23×10^{-3}	0.21×10^{-3}	0.32×10^{-3}	0.30×10^{-3}
> 60	0.16×10^{-3}	0.20×10^{-3}	0.19×10^{-3}	0.28×10^{-3}

Tabella 2.2: Deformazioni di ritiro a tempo infinito $\epsilon_{cs}(\infty, t_0)$ secondo la normativa italiana

U.R.	$\alpha \leq 15$ cm	$\alpha \geq 60$ cm
50%	0.60×10^{-3}	0.50×10^{-3}
80%	0.33×10^{-3}	0.28×10^{-3}

Tabella 2.3: Deformazioni di ritiro a tempo infinito $\epsilon_{cs}(\infty)$ secondo EC2

convenzionale del calcestruzzo. Una analisi accurata degli effetti della viscosità e del ritiro è richiesta invece quando si debba tener conto degli effetti di stati di coazione, poichè questi sono fortemente influenzati dalla deformabilità dei componenti della struttura. È questo il caso delle strutture in *cemento armato precompresso* in quanto la precompressione è proprio uno stato di coazione, indotto artificialmente tra calcestruzzo ed acciaio, che viene sensibilmente alterato dall'evolvere delle deformazioni lente.

Ritiro

Il ritiro del calcestruzzo, come già detto, si manifesta come una riduzione progressiva di volume, prodotta dall'evaporazione dell'acqua in eccesso rispetto al minimo richiesto dall'idratazione del cemento e rimasta intrappolata nei micropori della pasta cementizia. Questo spiega la notevole influenza che sul fenomeno ha l'umidità relativa dell'ambiente circostante ed il rapporto tra la superficie ed il volume dell'elemento.

L'entità del ritiro è inoltre influenzato dalla composizione del calcestruzzo: il rapporto acqua-cemento, la percentuale di inerti fini, il quantitativo totale di cemento sono variabili al cui aumento corrisponde un'amplificazione del fenomeno del ritiro.

Nel progetto l'entità delle deformazioni di ritiro si possono stimare sulla base di dati non specifici, presi dalla normativa. Nella norma italiana la deformazione finale ($\epsilon_{cs}(\infty, t_0)$) viene fornita in funzione dell'umidità relativa ambientale e della "dimensione fittizia" $\alpha = 2A_c/u$, in cui A_c è l'area della sezione di conglomerato e u il perimetro a contatto con l'atmosfera, nonché del tempo t_0 a partire dal quale si considera l'effetto del ritiro. Questi valori sono riportati nella tabella 2.2.

La bozza di normativa europea EC2 non tiene conto di t_0 ; il ritiro a tempo infinito è dato solo in funzione di α e dell'umidità ambientale, come riportato nella tabella 2.3.

Le due normative citate non danno indicazioni circa la legge con cui il fenomeno evolve nel tempo. A questo proposito le norme ACI suggeriscono la relazione:

$$\epsilon_{cs}(t, t_0) = \epsilon_{cs\infty} \frac{t - t_0}{35 + t - t_0} \quad (2.13)$$

in cui $\epsilon_{cs\infty}$ è la deformazione finale e t è il tempo in giorni, misurato dalla data del getto, mentre t_0 (usualmente 7 giorni) è il tempo per cui si ritiene abbia inizio il ritiro.

Viscosità

Nel calcestruzzo, per livelli di tensione non troppo prossimi alla resistenza del materiale, si può assumere che le deformazioni viscoso siano proporzionali alle tensioni; si può parlare pertanto di viscosità lineare. Se la tensione σ_c , applicata all'istante t_0 misurato a partire dalla data del getto, rimane costante fino al tempo t , si può porre:

$$\epsilon_c(t) = \frac{\sigma_c}{E_c} [1 + \phi(t, t_0)] \quad (t \geq t_0) \quad (2.14)$$

in cui la deformazione totale al tempo t , ϵ_c , è espressa come somma della parte elastica (istantanea) σ_c/E_c e di quella viscosa $(\sigma_c/E_c)\phi(t, t_0)$. La funzione $\phi(t, t_0)$ è detta *funzione di viscosità* ed esprime il rapporto, al tempo t , tra la parte lenta e quella istantanea della deformazione.

Sempre nei limiti di una teoria lineare, le deformazioni viscoso sono additive; se si applica un carico al tempo t_1 che produce una tensione σ_{c1} ed un altro al tempo t_2 cui corrisponde la tensione σ_2 , la deformazione al tempo t è data dalla relazione:

$$\epsilon_c(t) = \frac{\sigma_{c1}}{E_c} [1 + \phi(t, t_1)] + \frac{\sigma_{c2}}{E_c} [1 + \phi(t, t_2)]$$

Per $\sigma_{c2} = -\sigma_{c1}$, ciò che corrisponde allo scarico completo, si ha:

$$\epsilon_c(t) = \frac{\sigma_{c1}}{E_c} [\phi(t, t_1) - \phi(t, t_2)] \quad (t_2 > t_1)$$

Inizialmente, $t = t_2$, solo la deformazione elastica viene restituita, mentre la deformazione viscosa permane integralmente in quanto $\phi(t_2, t_2) = 0$. Al crescere di t il secondo termine cresce più rapidamente del primo, così che una parte della deformazione viscosa viene recuperata; la deformazione residua tende al valore asintotico che si raggiunge a tempo infinito:

$$\epsilon_c(\infty) = \frac{\sigma_{c1}}{E_c} [\phi(\infty, t_1) - \phi(\infty, t_2)]$$

L'entità della deformazione residua dipende dalle età di messa in carico t_1 e t_2 : diminuisce al crescere di t_1 (età di prima messa in carico) mentre aumenta con la differenza $t_2 - t_1$ (durata del tempo di carico). L'andamento nel tempo delle deformazioni per una prova di questo tipo è illustrato nella fig. 2.10.

Nel caso generale la deformazione al tempo t , conseguente ad una storia di tensioni $\sigma_c(\tau)$, si calcola con la relazione:

$$\epsilon_c(t) = \frac{1}{E_c} \int_0^t [1 + \phi(t, \tau)] d\sigma_c(\tau) = \frac{1}{E_c} \int_0^t [1 + \phi(t, \tau)] \dot{\sigma}_c(\tau) d\tau \quad (2.15)$$

dove $\dot{\sigma}_c(\tau)$ indica la velocità di variazione della tensione al tempo τ .

Per il calcestruzzo la viscosità, come il ritiro, è dovuta principalmente alla perdita dell'acqua racchiusa nel getto; pertanto la deformabilità viscosa del materiale è funzione delle stesse grandezze che influenzano il ritiro.

Nelle norme italiane il coefficiente di viscosità a tempo infinito $\phi(\infty, t_0)$ è tabellato in funzione dell'età di messa in carico t_0 , dell'umidità ambientale e della dimensione fittizia α della sezione, come riportato nella tabella 2.4

Esaminando la tabella 2.4 si osserva che la deformazione viscoso varia tra 1.4 e 3.8 volte quella istantanea, con un valore medio superiore a 2. Da ciò risalta l'importanza

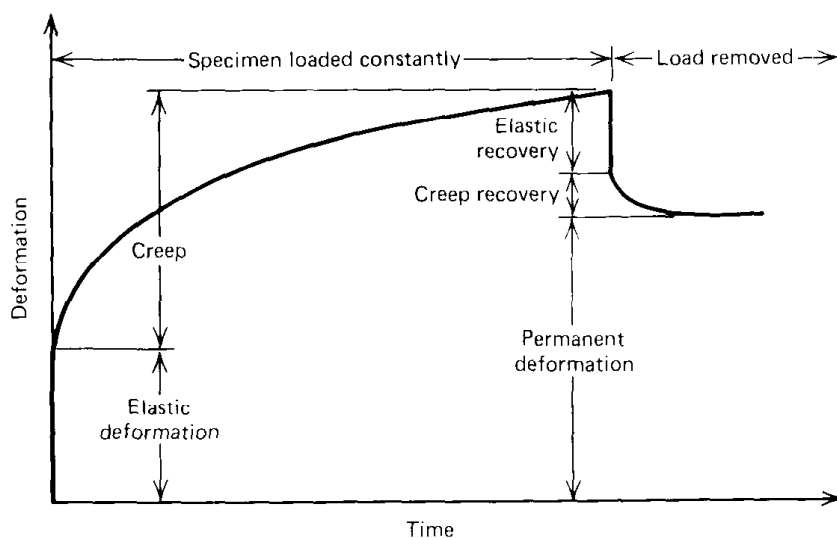


Figura 2.10: Evoluzione temporale delle deformazioni del calcestruzzo dovute alla viscosità

t_0 giorni	UR=75%		UR=55%	
	$\alpha \leq 20$ cm	$\alpha \geq 60$ cm	$\alpha \leq 20$ cm	$\alpha \geq 60$ cm
3 ÷ 7	2.7	2.1	3.8	2.9
8 ÷ 60	2.2	1.9	3.0	2.5
> 60	1.4	1.7	1.7	2.0

Tabella 2.4: Coefficienti di viscosità a tempo infinito, secondo la normativa italiana

quantitativa del termine viscoso sulla deformazione finale di un elemento soggetto a carichi di lunga durata, in quanto la parte viscosa della deformazione è in media più che doppia di quella elastica.

Le EC2 forniscono una tabella analoga, ma con valori differenti, come mostrato nella tab. 2.5.

Per la valutazione della deformazione viscosa la normativa ACI fornisce una relazione analitica della funzione di viscosità, espressa nella forma:

$$\phi(t, t_0) = C\varphi(t, t_0) \quad (2.16)$$

t_0 giorni	UR=80%			UR=50%		
	$\alpha = 5$ cm	$\alpha = 15$ cm	$\alpha = 60$ cm	$\alpha = 5$ cm	$\alpha = 15$ cm	$\alpha = 60$ cm
1	3.5	3.0	2.6	5.4	4.4	3.6
7	2.5	2.1	1.9	3.9	3.2	2.5
28	1.9	1.7	1.5	3.2	2.5	2.0
90	1.6	1.4	1.2	2.6	2.1	1.6
365	1.2	1.0	1.0	2.0	1.6	1.2

Tabella 2.5: Coefficienti di viscosità a tempo infinito, secondo EC2

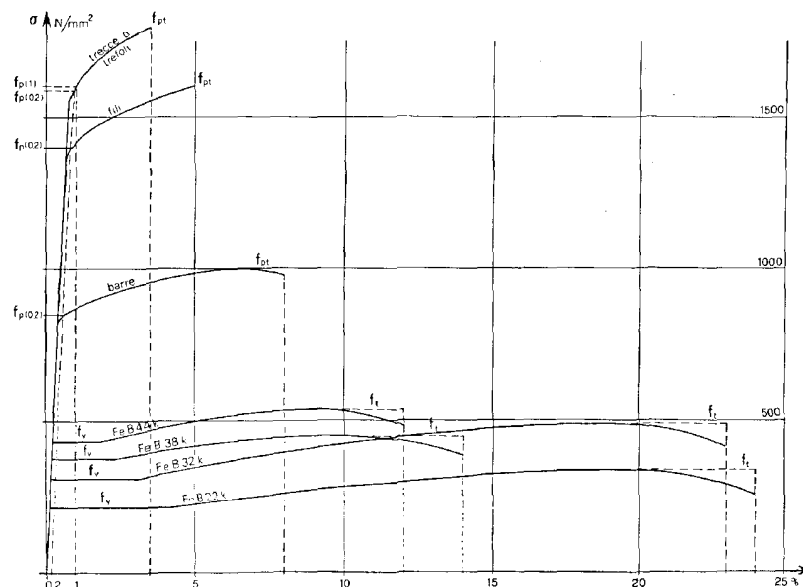


Figura 2.11: Curve tensione-deformazione di acciai da cemento armato e precompresso

in cui C è un parametro da cui dipende la deformazione finale, funzione degli stessi fattori che influenzano il ritiro, mentre la funzione $\varphi()$ è espressa dalla relazione:

$$\varphi(t, t_0) = 1.25t_0^{-0.118} \frac{(t - t_0)^{0.6}}{10 + (t - t_0)^{0.6}} \quad (2.17)$$

in cui il tempo t , misurato a partire dalla data del getto, è espresso in giorni.

A titolo di esempio, prendendo in esame un elemento prismatico con sezione $30 \times 50 \text{ cm}^2$ ($\alpha = 18.8$), caricato al 60° giorno dal getto ed esposto in ambiente umido ($UR \simeq 75 \div 80\%$), le norme italiane forniscono il valore $\phi_\infty = 2.2$, dalle EC2, interpolando la tabella 2.5, si ottiene $\phi_\infty = 1.52$, mentre per le ACI si ha $\phi_\infty \sim 1.14$. Si deve concludere che non vi è una grande concordanza di opinioni tra gli estensori delle diverse normative.

2.3 L'acciaio

L'acciaio nel cemento armato è impiegato sotto forma di barre di sezione circolare, o approssimativamente tale. Infatti per aumentare l'aderenza (vedi sez. 2.4) con il calcestruzzo, l'acciaio di qualità migliore viene prodotto in barre sulla cui superficie vengono realizzati dei risalti: questo tipo di barre è detto *ad aderenza migliorata*. In tutti i casi le barre sono caratterizzate dal diametro effettivo (barre tonde lisce) o dal diametro nominale di una barra circolare di uguale lunghezza e peso (barre ad aderenza migliorata).

In pratica si possono distinguere due tipi di acciai: l'acciaio ordinario, impiegato nel cemento armato normale e quello ad *alta resistenza* che si usa nel cemento armato precompresso. Le caratteristiche di quest'ultimo tipo saranno illustrate in uno dei capitoli dedicati alla precompressione.

Le caratteristiche meccaniche dell'acciaio si determinano mediante prove di trazione su monconi di barra; tipici diagrammi tensione-deformazione di acciai con diverse carat-

teristiche di resistenza, sono rappresentati in fig. 2.11. Come è esemplificato nella figura l'andamento tipico della legge $\sigma - \epsilon$ mostra un tratto elastico lineare che si estende fino alla tensione f_y , detta di *snervamento*, seguito da un tratto in cui la deformazione cresce con tensione praticamente costante (tratto plastico). Successivamente la tensione torna a salire, ma con pendenza molto inferiore a quella iniziale elastica, (incrudimento) fino a raggiungere un massimo, per poi diminuire seguendo un ramo instabile con pendenza negativa che termina con la rottura effettiva della barra.

La grandezza più importante per definire la resistenza del materiale è la *tensione di snervamento* f_y . Come *tensione di rottura* f_t si assume il massimo valore raggiunto nella fase di incrudimento, in quanto il valore effettivo al momento della rottura si può misurare solamente con prove a spostamento impresso.

I digrammi di fig. 2.11 evidenziano alcune proprietà che sono elencate nel seguito:

- Il modulo elastico dell'acciaio è praticamente costante e pertanto non dipende dalla tensione di snervamento. Con buona approssimazione si può assumere, per tutti i tipi di acciaio:

$$E_s = 2.05 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

- L'estensione del tratto plastico e l'allungamento di rottura ϵ_t diminuiscono al crescere della tensione di snervamento: gli acciai di qualità migliore sono pertanto meno duttili. Tuttavia negli acciai impiegati nel cemento armato gli allungamenti di rottura sono comunque elevati.

Negli acciai di qualità migliore il tratto plastico può essere del tutto assente per cui non è possibile riconoscere un preciso valore della tensione di snervamento. In questo caso si adotta la convenzione di sostituire alla tensione di snervamento la tensione che corrisponde ad una deformazione residua stabilita, generalmente lo 0.2%. Questo valore viene indicato con il simbolo $f_{(0.2)}$ e si determina nel modo seguente: sul diagramma $\sigma - \epsilon$ si traccia una retta parallela al ramo elastico che taglia le ordinate nel punto $\epsilon = 0.002$; l'intersezione di questa retta con la curva di carico individua il punto di ordinata $f_{(0.2)}$. Infatti, se lo scarico fosse esattamente parallelo al ramo elastico, raggiunto questo punto, dopo lo scarico si avrebbe una deformazione residua dello 0.2%.

Come materiale l'acciaio ha comportamento simmetrico in trazione e compressione: pertanto la prova di trazione è sufficiente ad individuarne le caratteristiche meccaniche. Ovviamente, a causa dei fenomeni di instabilità, il comportamento degli elementi può essere molto diverso in trazione e compressione.

Il comportamento ciclico dell'acciaio, in prima approssimazione, può essere modellato con una semplice legge elasto-plastica: ramo elastico lineare, deformazione plastica a tensione costante, scarico parallelo al ramo elastico fino alla soglia di snervamento di segno opposto. Questo modello non consente di descrivere fenomeni quali l'effetto Bauschinger, per cui la tensione di plasticizzazione si riduce al crescere della precedente escursione plastica.

Una legge che descrive in modo soddisfacente il comportamento ciclico dell'acciaio è quella di *Menegotto e Pinto*, derivata da una precedente di Ramberg-Osgood:

$$\sigma^* = b\epsilon^* + \frac{(1-b)\epsilon^*}{(1 + \epsilon^{*R})^{1/R}} \quad (2.18)$$

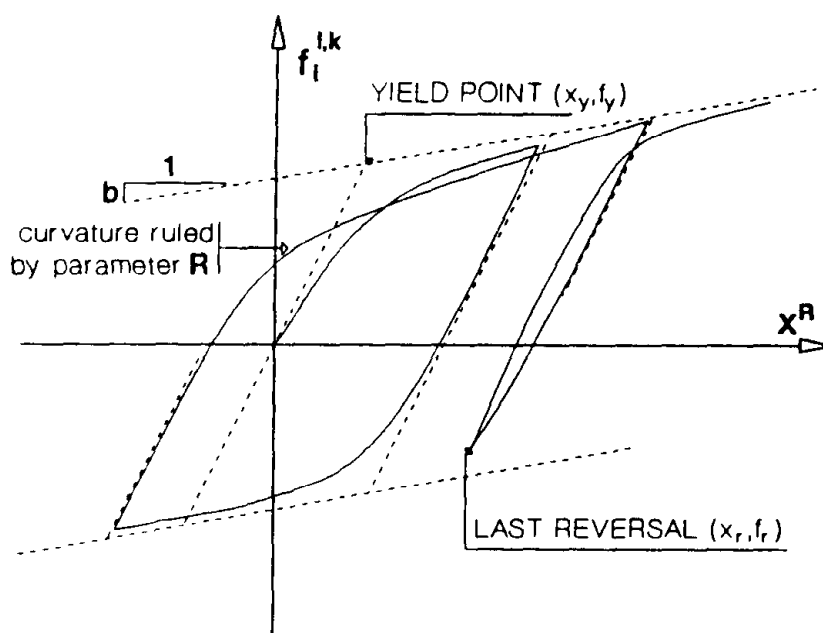


Figura 2.12: Comportamento ciclico dell'acciaio secondo il modello di Menegotto e Pinto

in cui b ed R sono parametri che definiscono la forma della curva, mentre σ^* ed ϵ^* sono rispettivamente la tensione e la deformazione normalizzate:

$$\sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_r}{f_y - \sigma_r}, \quad \epsilon^* = \frac{\epsilon - \epsilon_r}{\epsilon_y - \epsilon_r} \quad (2.19)$$

dove (f_y, ϵ_y) sono le coordinate del punto di snervamento nel diagramma bilineare involuppo (fig. 2.12) e (σ_r, ϵ_r) sono le coordinate dell'ultimo punto di inversione del segno della velocità di deformazione. Dalla costante b dipende l'inclinazione del ramo incrudente, mentre R controlla il raggio del ramo di raccordo tra il ramo elastico e quello plastico; elevati valori di R corrispondono ad una transizione brusca, di tipo elasto-plastico.

2.4 L'aderenza

Il corretto funzionamento delle strutture in cemento armato dipende dalla effettiva possibilità che i due materiali costituenti, calcestruzzo ed acciaio, siano realmente solidali, cioè subiscano le stesse deformazioni. Questo comportamento è reso possibile dall'*aderenza*, il fenomeno attraverso cui si trasmettono gli sforzi tra i due materiali.

Il diagramma in fig. 2.13 illustra il risultato di una prova di sfilamento: una barra, annessa per una lunghezza fissata in un blocco di calcestruzzo, viene sollecitata a trazione fino allo sfilamento. Nel diagramma, in cui è riportato il legame tra la forza applicata e lo scorrimento relativo, si distinguono alcuni tratti con diverse caratteristiche. In una prima fase la forza cresce quasi in assenza di scorrimenti; questa è dominata dai legami chimici, che si formano durante la presa, tra il cemento e l'acciaio. Superata la modesta resistenza offerta da questi legami, la forza può ancora crescere, ma ora a prezzo di scorrimenti più elevati (secondo ramo della curva). Nelle barre lisce l'incremento di forza che si sviluppa in

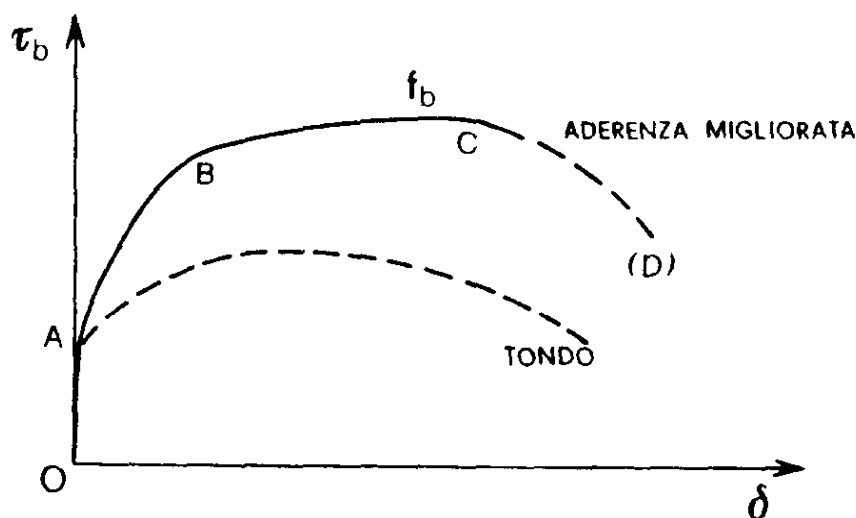


Figura 2.13: Curve forza–spostamento di prove di sfilamento.

questo tratto è piccolo e dipende dall’“ingranamento” tra il calcestruzzo e le microrugosità della superficie delle barre. Nel caso di barre ad aderenza migliorata questo incremento è molto più sensibile, in quanto mette in gioco l’ingranamento con le nervature sulla superficie delle barre; per vincere l’aderenza devono rompersi i denti di calcestruzzo che ostacolano lo scorrimento. Quando questo avviene ha inizio una fase di grandi scorrimenti a forza circa costante che precede lo sfilamento della barra.

Il reale andamento delle tensioni di contatto tra calcestruzzo e acciaio lungo la superficie della barra è difficilmente prevedibile. Di solito si assume, convenzionalmente, che la tensione sia costante su tutta la superficie a contatto; in questo caso il legame tra la forza e la tensione (media) τ_b di aderenza, per una barra di diametro ϕ annegata nel calcestruzzo per una lunghezza l , è dato dalla relazione:

$$F_b = \pi \phi l \tau_b \quad (2.20)$$

Normalmente la misura dell’aderenza non si esegue con prove dirette di sfilamento, difficili da eseguirsi, ma con una prova indiretta (beam test), sollecitando a flessione un travetto armato con barre ancorate per una lunghezza fissata e la cui sezione centrale è costituita solo dall’armatura tesa e da una cerniera metallica praticamente puntiforme. La forza di sfilamento risulta pertanto data dalla relazione $F_b = M_b/z$, dove M_b è il momento che produce lo sfilamento dell’armatura mentre z è la distanza tra la cerniera metallica e l’armatura nella sezione di mezzeria.

2.5 Classificazione dei materiali

2.5.1 Frattili e valori caratteristici

Verificare una struttura significa controllare che, sotto l’azione di alcune combinazioni dei carichi, lo stato di sollecitazione non esca da opportuni domini di resistenza, che

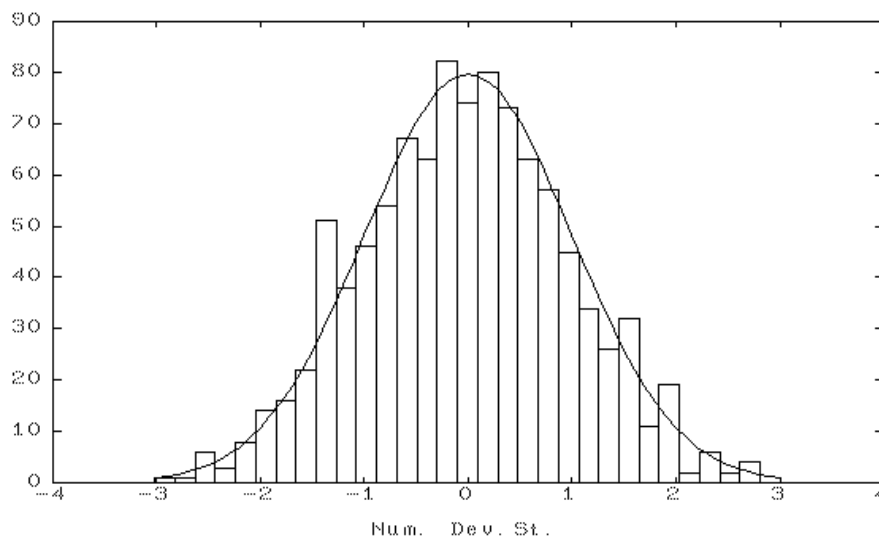


Figura 2.14: Istogramma delle frequenze di un campione statistico di una variabile aleatoria gaussiana

dipendono ovviamente dalle proprietà meccaniche dei materiali, ma anche dal tipo di carichi considerati. Infatti se si prendono in conto carichi eccezionali, per intensità o per tipo, il dominio sarà quello di non collasso, mentre per azioni frequenti si utilizzerà un dominio di buon funzionamento.

Queste assunzioni presuppongono che le caratteristiche dei materiali (resistenze, moduli elastici, deformazioni ultime, ecc . . .) siano delle grandezze deterministiche, individuate da valori precisi. Ma così non è. Delle azioni si dirà altrove, per quel che riguarda le caratteristiche meccaniche dei materiali, se, ad esempio, da uno stesso getto di calcestruzzo si prelevano alcuni campioni che vengono poi posti a maturare per ugual tempo nello stesso ambiente e quindi sottoposti a prova, in genere si otterranno risultati tutti diversi. In questo caso la dispersione è piccola, ma diviene molto più grande quando si analizzano i risultati di prelievi di getti diversi, anche se ottenuti in condizioni analoghe, usando le stesse quantità e gli stessi tipi dei materiali costituenti.

Le caratteristiche meccaniche del calcestruzzo sono grandezze particolarmente incerte, data la difficoltà di controllare il processo di produzione; ma anche per l'acciaio si verifica, seppure in misura inferiore, una analoga dispersione dei risultati. Considerazioni di questo tipo valgono in sostanza per tutti i materiali.

Immaginando di disporre dei risultati di misure sperimentali di una grandezza meccanica (p.es. la resistenza a rottura) eseguite su numerosi campioni di un materiale (p.es. calcestruzzo), potremmo costruire un istogramma delle frequenze del tipo illustrato in fig. 2.14.

Come si vede il grafico mostra un andamento “a campana” in cui i valori massimi delle ordinate sono prossimi alla media aritmetica dei risultati. Per valori non troppo vicini a zero l'istogramma si può approssimare con la curva densità di probabilità di Gauss:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - m}{\sigma_x} \right)^2 \right] \quad (2.21)$$

in cui m e σ_x indicano la media e la deviazione standard della distribuzione.

In sostanza questo significa che la resistenza dei materiali e le altre grandezze meccaniche (ed anche i carichi) dovrebbero essere trattate come variabili aleatorie, ossia grandezze che non sono individuate da un preciso valore, ma da una distribuzione di probabilità estesa ad un intervallo limitato o no.

L'analisi probabilistica delle strutture è una disciplina relativamente recente, ma ormai sufficientemente evoluta; purtroppo la rinuncia allo schema deterministico e quindi la trattazione probabilistica dei problemi dà luogo ad un aumento notevole della loro complessità. Così tutte le norme attualmente in vigore fanno riferimento al più semplice schema deterministico.

Rimane tuttavia il problema di assegnare a delle grandezze intrinsecamente aleatorie dei valori deterministici significativi. Una scelta apparentemente ragionevole potrebbe essere il valore medio, ma in questo modo non si terrebbe conto della dispersione: due materiali con resistenze di uguale valor medio ma diverse dispersioni non possono essere trattati allo stesso modo, in quanto quello cui corrispondono risultati più dispersi è ovviamente meno affidabile.

Nella maggior parte delle normative moderne si è fatto riferimento al concetto di valore frattile di una variabile aleatoria, definito nel seguente modo:

Data una variabile aleatoria X , con funzione di distribuzione

$$F_X(x) : F_X(x) = P(X \leq x)$$

($P()$ è la funzione di probabilità) si definisce frattile inferiore di probabilità p quel valore x_p tale che

$$F_X(x_p) = p$$

ossia quel valore tale che vi è una probabilità p che risulti $X \leq x_p$. Analogamente si può definire un frattile superiore \bar{x}_p , tale che $1 - F_X(\bar{x}_p) = p$; ossia vi è probabilità p che risulti $X > \bar{x}_p$.

La maggior parte delle normative moderne assumono come valori di riferimento (nominali) delle resistenze dei materiali il valore frattile inferiore al 5% ($p = 0.05$). Per i carichi generalmente si fa riferimento ai frattili superiori della stessa probabilità. Questi frattili vengono indicati come *valori caratteristici* delle grandezze in esame. Pertanto i materiali vengono comunemente classificati in base al valore caratteristico della resistenza.

Per la normativa italiana il calcestruzzo viene classificato mediante il valore caratteristico della resistenza misurata su provini cubici (R_{ck}), mentre nella maggior parte delle altre normative si fa riferimento alla resistenza cilindrica ($f_{ck} \simeq 0.83R_{ck}$). Analogamente gli acciai sono classificati in base alla tensione caratteristica di snervamento f_{yk} , ecc ...

Nel caso che una variabile aleatoria X si possa ritenere gaussiana con media m_X e deviazione standard σ_X , il valore caratteristico (frattile al 5% inferiore) è dato semplicemente da:

$$X_k = m_X - 1.64\sigma_X \quad (2.22)$$

Se si dispone di numerosi campioni la media e la deviazione standard di X si possono stimare mediante la media statistica \bar{X} e la radice dello scarto quadratico medio, cioè:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad s_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \quad (2.23)$$

Se si dispone di un numero limitato di campioni il valor medio e la varianza non sono noti con certezza; in questo caso l'eq. (2.22) è ancora applicabile, sostituendo ad 1.64 un coefficiente k (>1.64) il cui valore dipende dal numero n dei campioni esaminati.

2.5.2 Controllo di accettazione

Per il calcestruzzo lo schema teorico delineato prima è difficilmente applicabile; infatti al momento della messa in opera il materiale è fluido e solo dopo diversi giorni (28 giorni è il tempo di riferimento) avrà raggiunto una resistenza confrontabile con quella di esercizio. Pertanto l'indagine statistica non potrà basarsi su di una valutazione a priori della resistenza caratteristica, ma dovrà piuttosto conformarsi ai criteri di accettazione statistica. Il problema sostanzialmente si può porre in questi termini: ipotizzato un valore della resistenza caratteristica si dovrà controllare che, con probabilità assegnata, la reale resistenza caratteristica del materiale non è inferiore a quella utilizzata nei calcoli.

Per la normativa italiana un prelievo è formato da due campioni, prelevati da uno stesso getto al momento della posa in opera; la media delle resistenze dei due campioni è detta *resistenza di prelievo*. Il controllo di accettazione si può eseguire secondo due diverse modalità:

1. Ogni controllo di accettazione è rappresentato da tre prelievi (6 campioni) ciascuno dei quali eseguito su di un massimo di 100 m³ di getto. Si eseguirà pertanto almeno un controllo ogni 300 m³ di getto. Indicando con R_m la media aritmetica delle tre resistenze di prelievo e con R_{\min} il valore minimo tra i tre, il controllo è superato se:

$$R_m \geq R_{ck} + 3.5 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

$$R_{\min} \geq R_{ck} - 3.5 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

2. Nel caso di costruzioni con più di 1500 m³ di calcestruzzo è ammesso un controllo di tipo statistico.

Viene eseguito almeno un prelievo ogni giorno di getto e, complessivamente, non meno di 15 prelievi ogni 1500 m³. Il controllo è superato se sono verificate le condizioni seguenti:

$$R_m \geq R_{ck} + 1.4s$$

$$R_{\min} \geq R_{ck} - 3.5 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

in cui R_{\min} è il valore minimo delle resistenze di prelievo ed s^2 il loro scarto quadratico medio, definito nell'eq. (2.23).

2.5.3 Classificazione degli acciai

Gli acciai in barre da cemento armato prodotti in Italia sono raggruppati in 4 classi, contraddistinte dal valore caratteristico della tensione di snervamento f_{yk} . Le due classi di minor qualità sono prodotte in barre tonde lisce, le altre due in barre ad aderenza migliorata. Indicando con f_{tk} la resistenza caratteristica a rottura e con A_5 l'allungamento a rottura, i valori minimi che queste grandezze devono prendere perché un acciaio possa appartenere ad una certa classe sono riportati nella tabella 2.6.

Si possono impiegare barre con diametro compreso tra 5 e 30 mm, ad eccezione del tipo FeB 44k, per cui non si possono impiegare barre con diametro superiore ai 26 mm; solitamente vengono prodotte solo barre con diametro pari (6, 8, ecc ...).

TIPO	f_{yk} N/mm ²	f_{tk} N/mm ²	A_5 %
Fe B 22 k	215	335	24
Fe B 32 k	315	490	23
Fe B 38 k	375	450	14
Fe B 44 k	430	540	12

Tabella 2.6: Principali caratteristiche degli acciai secondo le norme italiane

f_{yk} N/mm ²	f_{tk} N/mm ²	A_5 (%)
390	440	8

Tabella 2.7: Caratteristiche dei fili e delle reti elettrosaldati

Oltre che in barre, l'acciaio per il cemento armato viene prodotto in fili trafilati ed in reti e tralicci elettrosaldati, con diametri compresi tra 5 e 12 mm. Le caratteristiche di queste armature sono elencate nella tabella 2.7. Quando manca il tratto plastico la tensione di snervamento viene sostituita da $f_{(0.2)k}$.

2.5.4 Valori di progetto, diagrammi di calcolo

I valori caratteristici sono le etichette con cui vengono classificate le grandezze meccaniche dei materiali: attraverso essi si cerca di tener conto, sia pure rozzamente, della natura aleatoria di queste grandezze.

Dai valori caratteristici si derivano quindi i *valori di progetto*, ossia i valori deterministici nominali da utilizzare nelle formule di verifica. La scelta di questi valori dipende dal livello di rischio che si accetta circa il verificarsi di un evento sfavorevole, ossia che le sollecitazioni escano dal dominio di resistenza della struttura.

Generalmente, fissato un livello di rischio, cioè una probabilità accettata che la condizione sia violata, non esiste un unico valore di progetto valido per tutte le situazioni; a rigore si dovrebbe utilizzare un valore diverso per ogni caso in quanto esso dipende dal particolare problema strutturale, dalla natura delle azioni considerate, dal tipo di verifica, ecc ...

In pratica per ogni grandezza meccanica di un certo materiale si individuano due soli valori di progetto: per le verifiche agli stati limite ultimi (di collasso) e per la verifiche agli stati limite di esercizio. Questi valori di progetto si ottengono dividendo il valore caratteristico della grandezza per dei *coefficienti di sicurezza*, generalmente diversi per i due tipi di verifica.³ Oltre che dal tipo di verifica, il coefficiente di sicurezza dipende dalla dispersione della grandezza a cui si applica: per grandezze con elevata dispersione (come ad esempio la resistenza del calcestruzzo) si adottano coefficienti grandi, per grandezze poco disperse si usano coefficienti più prossimi all'unità.

Nelle verifiche che richiedono l'analisi della struttura oltre il campo elastico, quali quelle agli stati limite ultimi, non è sufficiente definire il valore di una grandezza di resistenza del materiale, come ad esempio la tensione di rottura per compressione del calcestruzzo o di snervamento dell'acciaio, bensì occorre precisare l'intera legge tensioni-deformazioni del materiale. Questi legami, per il calcestruzzo e l'acciaio, sono stati illustrati nelle prece-

³Per le azioni si procede in modo analogo, ma in questo caso i coefficienti di sicurezza moltiplicano il valore caratteristico.

denti sezioni; tuttavia, di solito, è possibile utilizzare delle relazioni semplificate, chiamate *diagrammi di calcolo*, che, pur cogliendo gli aspetti essenziali del funzionamento del materiale, consentono di semplificare le formule di verifica. Questo aspetto è importante nel calcolo manuale, mentre risulta meno significativo quando si ricorre al calcolo automatico.

Il metodo delle tensioni ammissibili

Un criterio di verifica, che nella maggior parte delle normative è stato più o meno abbandonato, ma il cui uso è ancora molto diffuso in Italia, è il *metodo delle tensioni ammissibili*. Esso consiste nel verificare che, sotto carichi di esercizio, le tensioni nella struttura non superino dei valori (*ammissibili*), sensibilmente inferiori ai limiti di resistenza (rottura, snervamento, ecc ...), entro i quali il funzionamento dei materiali è sostanzialmente elastico.

Si tratta evidentemente della verifica di un particolare stato limite di esercizio; l'ipotesi su cui il metodo si fonda è che, se per valori di esercizio dei carichi le sollecitazioni rimangono nei limiti assegnati, allora sarà verificata anche la condizione che, per valori rari, non verrà superata la soglia di resistenza della struttura. In realtà questo non è sempre vero; in particolare rimane il problema di inserire in uno schema di azioni di esercizio quelle eccezionali (come i terremoti, ad esempio): la necessità di ridurre il livello di queste azioni per riportarle nell'ambito di una verifica in esercizio produce delle combinazioni di carichi che, in alcuni casi, risultano poco significative. Per le strutture in cemento armato, inoltre, l'utilità di certe soluzioni nella disposizione delle armature risulta evidente solo quando se ne esamina il funzionamento in prossimità delle condizioni di collasso. In genere le relative verifiche sono state inserite anche nel metodo delle tensioni ammissibili, conservandone il meccanismo e riducendo proporzionalmente azioni e resistenze; ma questi artifici, pur consentendo al metodo di offrire un grado di sicurezza adeguato, lo rendono poco coerente ed insoddisfacente dal punto di vista della formulazione teorica.

I valori previsti dalla normativa italiana per le tensioni ammissibili del calcestruzzo e dell'acciaio, sono riportati nel seguito.

Calcestruzzo La tensione ammissibile di compressione negli elementi soggetti a flessione o pressoflessione, come le travi, le solette o i pilastri, si ottiene, in funzione della resistenza caratteristica cubica a 28 giorni, con la seguente formula:

$$\bar{\sigma}_c = 6 + \frac{R_{ck} - 15}{4} \quad (\text{N/mm}^2) \quad (2.24)$$

Il valore così ottenuto viene ulteriormente ridotto nei seguenti casi:

1. Nelle solette di spessore inferiore di 5 cm si applica una riduzione del 30%.
2. Nelle travi a T con soletta collaborante:
 - se la soletta ha spessore minore di 5 cm la riduzione è del 30%
 - altrimenti la riduzione è del 10%.
3. Per i pilastri calcolati a compressione semplice la tensione ammissibile prende il valore ridotto:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_c &= 0.7\bar{\sigma}_c && \text{se } s \geq 25 \text{ cm} \\ \bar{\sigma}_c &= 0.7[1 - 0.03(25 - s)]\bar{\sigma}_c && \text{se } s < 25 \text{ cm} \end{aligned} \quad (2.25)$$

TIPO	FeB 22k	FeB 32k	FeB 38k	FeB 44k
$\bar{\sigma}_s$ (N/mm ²)	115	155	215	255

Tabella 2.8: Tensioni ammissibili dell'acciaio in barre

in cui s indica la minima dimensione della sezione.

- Negli elementi sollecitati a pressoflessione la tensione media relativa all'intera sezione non deve superare $\bar{\sigma}_c$.

Negli elementi soggetti alla sollecitazione di flessione e taglio o di torsione, se la tensione tangenziale massima non supera il valore:

$$\bar{\tau}_{c0} = 0.4 + \frac{R_{ck} - 15}{75} \quad (\text{N/mm}^2) \quad (2.26)$$

non è richiesta la verifica delle armature di taglio o di torsione.

In ogni caso la tensione tangenziale non deve superare il valore:

$$\bar{\tau}_{c1} = 1.4 + \frac{R_{ck} - 15}{35} \quad (\text{N/mm}^2) \quad (2.27)$$

Gli stessi valori sono ammessi nelle sezioni di attacco delle ali all'anima delle travi a T od a cassone.

In caso di azione combinata di torsione e taglio il valore di $\bar{\tau}_{c1}$ è incrementato del 10%.

Acciaio Le tensioni ammissibili degli acciai ($\bar{\sigma}_s$) sono date, in funzione della loro classe, nella tabella 2.8.

Per i fili e le reti elettrosaldate la tensione ammissibile si calcola con la seguente relazione:

$$\bar{\sigma}_s = \min(0.60f_{(0,2)k}, 0.55f_{tk}, 255) \quad (\text{N/mm}^2) \quad (2.28)$$

Aderenza La tensione tangenziale media di aderenza, calcolata nell'ipotesi di distribuzione uniforme, non deve superare uno dei seguenti valori:

- Barre tonde lisce:

$$\bar{\tau}_b = 1.5\bar{\tau}_{c0}$$

- Barre ad aderenza migliorata:

$$\bar{\tau}_b = 3.0\bar{\tau}_{c0}$$

Verifiche degli stati limite. Valori di progetto

Come si è già detto le resistenze di progetto f_d si ottengono dai valori caratteristici dividendoli per opportuni coefficienti di sicurezza γ :

$$f_d = \frac{f_k}{\gamma}$$

Nel seguito vengono riportati i valori dei coefficienti adottati dalla normativa italiana per i materiali costituenti le strutture in cemento armato.

Calcestruzzo I coefficienti di sicurezza per il calcestruzzo previsti dalla normativa italiana sono:

- Per le verifiche degli stati limite ultimi: $\gamma_c = 1.6$
- Per le verifiche degli stati limite di esercizio: $\gamma_c = 1.0$

Negli elementi con spessori minori di 5 cm il coefficiente γ_c deve essere maggiorato del 25%.

La resistenza di calcolo⁴ a compressione f_{cd} si ottiene dividendo la resistenza caratteristica *cilindrica* per il coefficiente γ_c ; pertanto:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{0.83R_{ck}}{\gamma_c} \quad (2.29)$$

Il diagramma di calcolo normalmente adottato per il calcestruzzo è quello *parabola-rettangolo*: esso è costituito, nell'intervallo $[0, \epsilon_{c1} = .002]$, da un ramo di parabola passante per l'origine e di equazione:

$$\sigma_c = 2\bar{f}_{cd} \left[\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right)^2 \right]$$

in cui $\bar{f}_{cd} = 0.85f_{cd}$, e da un tratto costante, nell'intervallo $[\epsilon_{c1}, \epsilon_{cu} = 0.0035]$, di ordinata \bar{f}_{cd} . Quindi la massima tensione di compressione del calcestruzzo risulta di fatto l'85% della resistenza di calcolo.⁵

La deformazione limite $\epsilon_{cu} = 0.0035$ è, convenzionalmente, la deformazione di rottura del materiale.

Resistenza a trazione In assenza di sperimentazione diretta, la resistenza a trazione semplice del calcestruzzo si esprime in funzione della resistenza caratteristica con la relazione:

$$f_{ctm} = 0.27R_{ck}^{2/3} \quad (\text{N/mm}^2) \quad (2.30)$$

in cui f_{ctm} indica il valore medio della resistenza a trazione. Il valore caratteristico si ottiene dal precedente moltiplicandolo per il coefficiente 0.7:

$$f_{ctk} = 0.7f_{ctm} \quad (2.31)$$

Il valore della resistenza a trazione per flessione si assume:

$$f_{cfm} = 1.2f_{ctm} \quad (2.32)$$

⁴I valori di progetto vengono, in Italia, indicati anche come *grandezze di calcolo*.

⁵Questa riduzione tiene conto che i diagrammi $\sigma - \epsilon$ reali del calcestruzzo hanno un ramo decrescente e pertanto la risultante delle tensioni su di una sezione inflessa oltre ϵ_{c1} risulta inferiore a quella calcolata con il diagramma schematico parabola-rettangolo.

Acciaio Per l'acciaio il coefficiente di sicurezza previsto dalla norma italiana è:

- per le verifiche degli stati limite ultimi: $\gamma_s = 1.15$
- per le verifiche degli stati limite di esercizio: $\gamma_s = 1.0$

Il diagramma di calcolo usuale è quello *elasto-plastico*, con ramo elastico di modulo $E_s = 2.05 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ fino alla tensione di snervamento (di calcolo) $f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s$ e ramo plastico a tensione costante fino all'allungamento limite (convenzionale) $\epsilon_{sl} = 0.01$. Si osservi che questa deformazione è molto minore di quella di rottura dell'acciaio, anche del tipo meno duttile; essa corrisponde piuttosto al venir meno delle ipotesi di funzionamento del cemento armato (principalmente dell'aderenza tra i due materiali) e non alla reale rottura della barra. Questo limite deve essere rispettato nel valutare la resistenza ultima delle sezioni, ma può essere trascurato se il calcolo è finalizzato ad altro, ad esempio alla valutazione della deformazione ultima.

Altre caratteristiche del calcestruzzo

Alcune grandezze, relative al calcestruzzo, di interesse per l'analisi strutturale, sono le seguenti:

- Coefficiente di Poisson: si può assumere un valore compreso tra 0.1 e 0.2.
- Coefficiente di dilatazione termica: è poco variabile e si assume per tutti i tipi il valore $10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.
- Peso specifico: convenzionalmente il peso specifico di un calcestruzzo normale non armato si assume pari a 2400 kg/m^3 . Il peso specifico del cemento armato si assume 2500 kg/m^3 .