

## Travi di Cemento Armato Soggette a Torsione

La torsione è la sollecitazione data da un momento agente con asse parallelo a quello della trave. A seconda della forma della sezione l'elemento resiste a questo tipo di sollecitazione in modo differenziato. Nelle sezioni compatte la torsione genera un flusso di sforzi di scorrimento continuo con andamento all'incirca circolare attorno all'asse della sezione. Nelle sezioni aperte viceversa, la torsione innesca flessioni di segno opposto su pareti disposte su lati opposti rispetto all'asse della sezione.

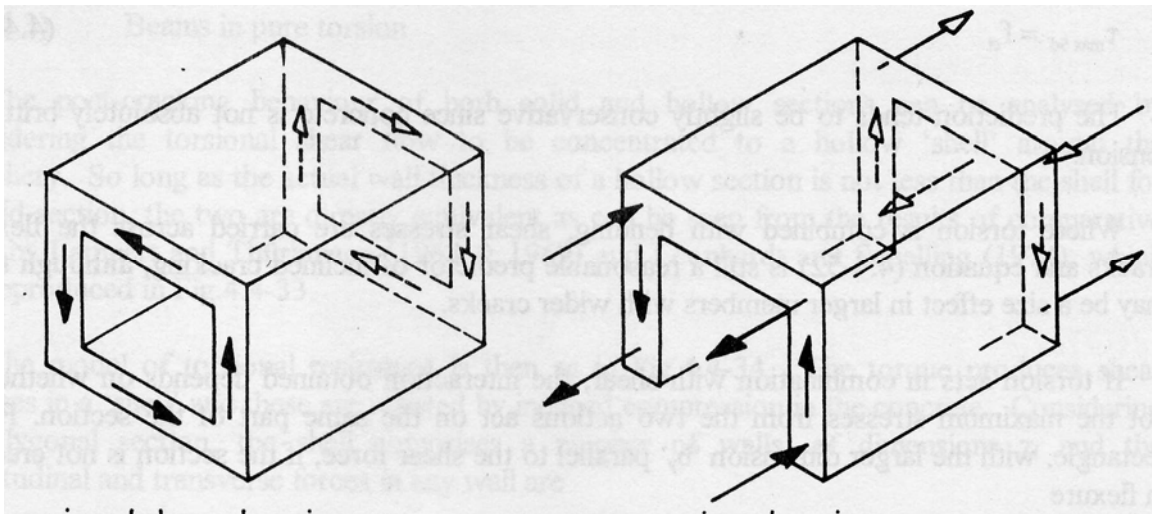


Figura 1 A sinistra: Torsione nelle sezioni compatte; A destra: torsione nelle sezioni aperte.

In generale in presenza di forti sollecitazioni torcenti è opportuno scegliere forme di sezione adatte a resistere in modo efficace, facendo quindi ricorso a sezioni compatte.

Quando l'equilibrio della struttura dipende dalla resistenza a torsione è essenziale tener conto di questa sollecitazione sia per lo stato limite di collasso (ultimo) che di servizio.

Quando in strutture iperstatiche la torsione nasce solo da considerazioni di compatibilità delle

deformazioni (congruenza), e l'equilibrio della struttura può essere trovato senza tener conto della resistenza a torsione, è possibile prescindere dalla torsione nella verifica allo stato limite ultimo. E' tuttavia importante disporre una armatura minima che garantisca il comportamento monolitico dell'elemento strutturale prevenendo la formazione di un'eccessiva quantità di lesioni per torsione, costituita da staffe e armature longitudinali.

**Travi non fessurate a torsione: stato tensionale, valutazione del momento di fessurazione**

Occorre naturalmente distinguere tra sezioni fessurate e non fessurate. La rigidezza torsionale, rapporto tra momento di estremità applicato e rotazione di estremità, nel caso di sezioni compatte non fessurate si ottiene con la teoria della elasticità:

$K_x = \frac{M_x}{\theta l} = \frac{GJ_G}{l} = \frac{\pi R^4 G}{2l} \quad (1)$ $J_G = \frac{\pi R^4}{2}$	Sez. circolari e circolari cave (nelle sezioni circolari cave si stituisce a $R^4$ la differenza $R^4 - R_i^4$ )
$K_x = \frac{M_x}{\theta l} = \frac{Ghb^3}{3l} \quad (2)$	Sezioni Rettangolari, con $h > b$
$K_x = \frac{4GA^2}{l \frac{u}{t}} \quad (3)$ <p>U= perimetro dell'asse della sezione                  t= spessore (se lo spessore varia al posto di u/t si introduce <math>\oint_p \frac{ds}{t}</math>, o si mette un valore medio di t)</p>	Sezioni cave
$K_x = \sum_{i=1}^n K_{xi} = \frac{G}{3l} \sum_{i=1}^n b_i^3 h_i \quad (4)$	Sezioni compatte composte da rettangoli, quali sezioni a T

I valori delle tensioni tangenziali massime si ottengono anch'esse con la teoria della elasticità.

$\tau_{\max} = \frac{T}{\pi(R^4 - R_i^4)/(16R)} \quad (5)$ <p>T = momento torcente</p>	Sez. circolari e circolari cave (raggio interno $R_i$ )																								
$\tau_{\max} = \frac{T}{kt^2b} \text{ al centro del lato maggiore} \quad (6)$ $\tau_{\max} = \frac{T}{k't^2b} \text{ al centro del lato minore}$ <table border="1" data-bbox="151 831 803 1001"> <tr> <td>b/t</td> <td>1</td> <td>1.5</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>6</td> <td><math>\infty</math></td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>0.21</td> <td>0.23</td> <td>0.25</td> <td>0.27</td> <td>0.28</td> <td>0.3</td> <td>0.33</td> </tr> <tr> <td>k'</td> <td>0.21</td> <td>0.27</td> <td>0.31</td> <td>0.33</td> <td>0.37</td> <td>0.40</td> <td></td> </tr> </table>	b/t	1	1.5	2	3	4	6	$\infty$	k	0.21	0.23	0.25	0.27	0.28	0.3	0.33	k'	0.21	0.27	0.31	0.33	0.37	0.40		Sezioni Rettangolari, con lati di dimensioni $b > t$
b/t	1	1.5	2	3	4	6	$\infty$																		
k	0.21	0.23	0.25	0.27	0.28	0.3	0.33																		
k'	0.21	0.27	0.31	0.33	0.37	0.40																			
$\tau_{\max} = \frac{T}{2At} \quad (7)$ <p>A= area interna all'asse della parete sezione cava                  t= spessore (se lo spessore varia al posto di <math>u/t</math> si introduce <math>\oint_p \frac{ds}{t}</math>, o si mette un valore medio di t)</p>	Sezioni cave																								
$\tau_{\max_i} = \frac{T_i}{kt_i^2b_i} \quad (8)$ $T_i = \frac{t_i^3b_i}{\sum_j t_j^3b_j}$	Sezioni compatte composte da rettangoli, quali sezioni a T																								

Per valutare se la sezione è fessurata nel caso di torsione pura, si può far riferimento alla relazione:

$$\tau_{\max} = f_{ct} \quad (9)$$

Nel caso di torsione e flessione le tensioni di scorrimento possono passare attraverso le fessure dovute alla flessione, pertanto la fessurazione dovuta alla torsione può ancora stimarsi con la (3), salvo il caso di elementi di notevoli dimensioni e lesioni di ampiezza rilevante.

Nel caso di torsione e taglio la interazione dipende dal fatto che le tensioni di scorrimento massime agiscano sulla stessa faccia.

Se la sollecitazione di taglio è parallela al lato maggiore  $b$  della sezione, e la sezione non è fessurata a flessione sia ha fessurazione per torsione taglio se:

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2bt} + \frac{T}{kb^2t} = f_{ct} \quad (10)$$

Viceversa se la sezione è fessurata a flessione:

$$\frac{V}{1.5V_{rd1}} + \frac{T}{kb^2tf_{ct}} = 1 \quad (11)$$

Ove  $V_{rd1}$  è il taglio di fessurazione

Se la sollecitazione di taglio è parallela al lato minore  $t$  della sezione, e la sezione non è fessurata a flessione sia ha fessurazione per torsione taglio se:

sul lato più lungo ove la tensione dovuta al taglio è nulla:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{kb^2t} = f_{ct} \quad (12)$$

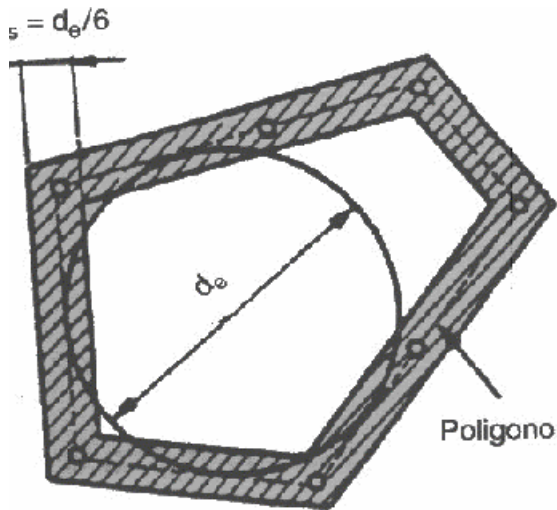
Sul lato più corto ove si combinano i due stati pensionali entrambi non nulli vale l'espressione (4

Se la sezione è fessurata a flessione, al posto della (4 si utilizza la (5).

Si osservi che lo stato di fessurazione è uno stato limite di esercizio, pertanto le grandezze relative alle resistenze ivi utilizzate non devono essere ridotte con i coefficienti parziali. Qualora si ritenessero rappresentative di stati limite ultimi, le grandezze andrebbero ridotte con i coefficienti parziali, pertanto  $f_{ct}$  andrebbe sostituito con  $f_{ctd}$  e nella espressione (5 il termine  $1.5V_{rd1}$  andrebbe sostituito con  $V_{rd1}$ .

## **Trave fessurata a torsione**

Una volta che si supera la resistenza a fessurazione, sia le travi a sezione piena che quelle a sezione cava possono analizzarsi facendo riferimento alla teoria delle sezioni cave a parete sottile. Si assume infatti, cosa dimostrata valida sperimentalmente, che la parte di conglomerato utile alla resistenza torsionale sia quella esterna, attribuendo alla zona interna un contributo trascurabile. In particolare si può assumere che lo spessore della zona resistente si ottenga dividendo l'area complessiva della sezione, inclusi eventuali vuoti, per il perimetro esterno della sezione. Questa assunzione è quella utilizzata ad esempio nell'Eurocodice 2, altre normative fanno assunzioni differenti, ad esempio la norma italiana del 1996 si utilizza quale spessore il valore  $t=D/6$ , ove  $D$  è il diametro del cerchio iscritto nella sezione individuata dalla congiungente delle armature longitudinali.



**Figura 2** Valutazione dello spessore equivalente secondo la norma Italiana DM1996.

Qualora la sezione sia effettivamente di tipo cavo, quali i cassoni delle travi da ponte, se lo spessore della sezione risulta inferiore a quello così ottenuto, si assume quello effettivo quale valore di calcolo.

Applicando la teoria delle sezioni monoconnesse sottili, si fa l'ipotesi che la sezione soggetta a torsione rimanga piana, che nascano tensioni tangenziali  $\tau$  parallele all'asse della sezione, tali che il prodotto  $\tau \times t$ , ove  $t$  è lo spessore della parete, sia costante:

$$\tau t = \frac{T}{2A} \quad (13)$$

L'espressione (13) si ottiene considerando l'equilibrio alla rotazione rispetto al baricentro della sezione, si ottiene così che :

$$\oint_s \tau t \times r ds = \tau t \oint_s r ds = \tau t \int_{0-2\pi} r r d\theta = \tau t \times 2A = T \quad (14)$$

Nella (14)  $A$  è l'area racchiusa dall'asse della sezione, pertanto invertendo l'espressione si ottiene la 1)

Con riferimento ad una sezione poligonale il taglio su ciascun lato vale:

$$F_{ti} = \tau t z_i \quad (15)$$

$$\frac{F_{ti}}{z_i} = \tau t = c \quad (16)$$



Questo dà luogo ad uno stato di sollecitazione, su ciascuna faccia, simile a quello studiato per il caso del taglio. Pertanto ogni faccia si fessura, dando luogo ad una serie di bielle compresse, che possono essere schematizzate per semplicità nella biella risultante per ciascun campo. Per poter ottenere l'equilibrio occorre realizzare un traliccio con un corrente superiore ed uno inferiore oltre a aste trasversali. Si noti che la ( 16 dimostra che il rapporto tra il taglio su ciascuna faccia e la sua altezza è costante, useremo questa proprietà più avanti valutando l'armatura da predisporre.

Detta  $\sigma_{cw}$  la tensione nel conglomerato della diagonale compressa, e detta  $\theta$  l'angolo di inclinazione della diagonale rispetto all'asse longitudinale della trave, la componente longitudinale e trasversale della risultante nella diagonale inclinata sono date rispettivamente da:

$$F_l = \sigma_{cw} t z \cos \theta \cos \theta = \sigma_{cw} t z \cos^2 \theta$$

$$F_t = \sigma_{cw} t z \cos \theta \sin \theta \tag{17}$$

$$\frac{F_l}{F_t} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$$

Si noti che mentre  $\sigma_{cw}$  e  $t$  possono variare da parete a parete, il prodotto  $(\sigma_{cw} t)$  è lo stesso per tutte le pareti così come il prodotto  $(\tau \times t)$ .

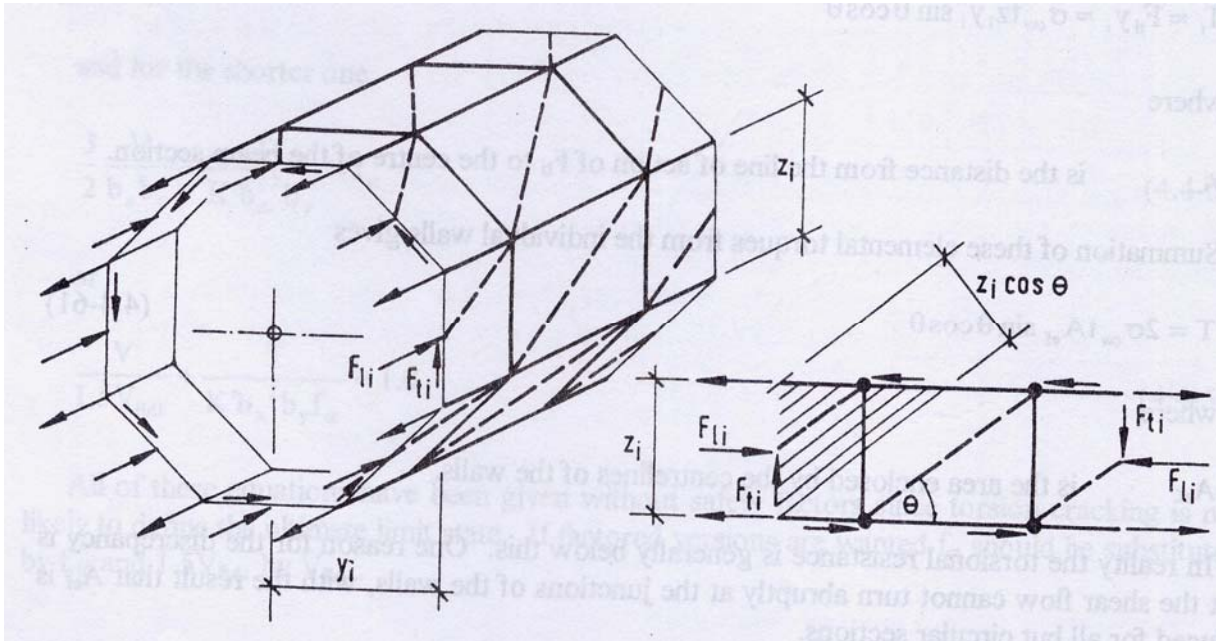


Figura 3. Schema del traliccio equivalente.

Facendo l'equilibrio alla rotazione delle forze trasversali rispetto all'asse della sezione si ottiene per ciascuna faccia:

$$T_i = F_{ti} \times y_i = (\sigma_{cw} t) z_i \cos \theta \sin \theta \times y_i = (\sigma_{cw} t) z_i \times y_i \cos \theta \sin \theta$$

Sommando i contributi di tutte le facce si ottiene l'eguaglianza tra momento interno ed esterno (torcente):

$$T = (\sigma_{cw} t) 2A \cos \theta \sin \theta$$

(18)

Salvo il caso delle sezioni circolari in realtà il valore fornito dalla espressione (18) è un massimo

teorico.

Il momento resistente è inferiore a causa di vari fenomeni, ad esempio del fatto che negli spigoli vi è una perturbazione del cosiddetto flusso delle tensioni ( $\tau \times t$ ) e quindi di ( $\sigma_{cw} t$ ).

Il valore reale si può stimare, ai fini della progettazione, aumentando il valore di T dividendolo per un coefficiente  $\delta$  che vale naturalmente 1 nelle sezioni circolari ed ha la seguente espressione nelle sezioni rettangolari di lati  $b_x$  e  $b_y$ , essendo  $b_x > b_y$ :

$$\delta = 1 - 0.25b_x / b_y$$
$$T_{eq} = T / \delta \quad (19)$$

Pertanto le forze taglianti sulle singole facce si ottengono combinando la (15) con la (19) ottenendo l'espressione:

$$F_{ti} = \frac{\left(\frac{T}{\delta}\right) z_i}{2A} = \frac{T_{eq} z_i}{2A} \quad (20)$$

### **Valutazione delle armature trasversali e longitudinali.**

Perché la biella compressa sia in equilibrio occorre disporre armature trasversali e armature longitudinali che garantiscano l'equilibrio nelle due direzioni.

Se il passo delle staffe di area  $A_i$  è  $s$ , il numero di staffe intersecate dalla diagonale compressa vale:

$$n = \frac{z_i \cot \theta}{s}$$

Pertanto per garantire la resistenza trasversale è necessario che l'area delle armature nelle pareti:

$$A_{st} n f_y = A_{st} \frac{z_i \cot \theta}{s} f_y \geq F_{ti} \quad (21)$$

Dalla ( 21 si ottiene:

$$\frac{A_{st} f_y}{s} \geq \frac{F_{ti}}{z_i \cot \theta} \quad (22)$$

Si noti che, come già osservato commentando l'espressione ( 16, il 2° termine della ( 22 ha lo stesso valore per tutte le facce. Pertanto l'armatura trasversale da predisporre è la stessa su tutte le facce.

$$\frac{A_{st} f_y}{s} \geq \frac{F_{ti}}{z_i \cot \theta} = \frac{T_{eq} z_i}{2A} \frac{1}{z_i \cot \theta} = \frac{T_{eq}}{2A \cot \theta} \quad (23)$$

A differenza del caso delle armature da disporre per il taglio, in questo caso  $A_{st}$  si riferisce all'area della armatura relativa a ciascun lato. Pertanto in una sezione rettangolare ove si dispone una staffa rettangolare,  $A_{st}$  si riferisce ad un braccio della staffa.

Ragionando in modo analogo si ricava l'armatura longitudinale che deve equilibrare la sollecitazione delle bielle compresse in senso longitudinale.

Utilizzando la ( 16e la ( 19 si ricava dal momento torcente la componente longitudinale su ciascuna faccia:

$$F_{li} = \frac{\left(\frac{T}{\delta}\right) z_i}{2A} \cot \theta = \frac{T_{eq} z_i}{2A} \cot \theta \quad (24)$$

Pertanto è necessario disporre su ciascuna faccia armatura longitudinale tale che:

$$A_{sl} f_y \geq \frac{T_{eq} z_i}{2A} \cot \theta \quad (25)$$

L'armatura longitudinale va distribuita lungo la lunghezza della faccia. Si osservi che alle intersezioni si sommano le armature di due facce. In travi di dimensioni modeste si tende a concentrare l'armatura longitudinale negli spigoli.

$$\sum A_{sl} f_y \geq \frac{T_{eq} \sum z_i}{2A} \cot \theta = \frac{T_{eq} u_z}{2A} \cot \theta \quad (26)$$

Nella ( 26  $u_z$  è il perimetro della sezione resistente, ottenuto come somma dei valori  $z$  di tutti i lati ( si noti non il perimetro esterno della sezione).

E' essenziale che nella intersezione delle due facce sia presente almeno una armatura longitudinale di diametro non inferiore ad un ottavo del passo delle staffe:

$$\phi_l \geq \frac{s}{8}$$

Il passo delle staffe non deve superare un ottavo del perimetro  $p$  dell'area della sezione resistente a torsione, in base alla quale si è valutata  $A$  ad esempio nelle espressioni (1), (2) e (23):

$$s \leq \frac{p}{8}$$

### **Verifica delle bielle compresse**

Se nella espressione (3'' si sostituisce a  $\sigma_{cw}$  il valore di  $f_{cd}$ , e si utilizza l'espressione che lega il momento torcente all'azione nella biella, ad esempio la (19), si ottiene:

$$f_{cd} t \cdot z \cos \theta \sin \theta \geq \frac{T_{eq} z_i}{2A} \quad (27)$$

Che eliminando  $z$  a primo e secondo membro diviene:

$$f_{cd} t \cos \theta \sin \theta \geq \frac{T_{eq}}{2A} \quad (28)$$

Dalla (27) si può valutare se lo spessore  $t$  è sufficiente:

$$t \cos \theta \sin \theta \geq \frac{T_{eq} z_i}{2A f_{cd}} \quad (29)$$

Lo spessore  $t$ , come detto in precedenza, può valutarsi nelle sezioni cave proprio considerando l'effettivo spessore, nelle sezioni piene dividendo l'area della sezione per il perimetro.

Lo spessore non deve mai assumersi inferiore alla metà della distanza dalla superficie esterna all'interno della staffa più esterna.

### **Valutazione dell'angolo di inclinazione $\theta$**

$\theta$  può assumersi, come per il caso del taglio, tale che:

$$1.0 \leq \cot \theta \leq 3.0$$

$$18.43^\circ \leq \cot \theta \leq 45^\circ$$

Assunto un valore di  $\theta$ , dalle espressioni ( 22 e ( 24 si ricava il valore delle armature longitudinali e trasversali. Si nota che all'aumentare dell'inclinazione delle bielle, cioè riducendo  $\theta$ , si riduce l'area delle staffe, mantenendo fisso il passo, ed aumenta l'armatura longitudinale, così come lo sforzo nelle bielle compresse.

Dalla ( 25 e dalla ( 25 e dalla ultima delle ( 16 si ha che:

$$\cot \theta = \sqrt{\frac{\frac{\sum A_{sl} f_y s}{u_z f_y}}{\frac{\sum A_{st} f_y}{s}}} \quad (30)$$

Si ricorda che nella ( 28,  $u_z$  è il perimetro della sezione resistente, ottenuto come somma dei valori  $z$  di tutti i lati ( si noti non il perimetro esterno della sezione).

In modo analogo si ricava il momento resistente delle armature:



$$T_r = 2A \sqrt{\frac{\sum A_{sl} f_y}{u_z}} \sqrt{\frac{\sum A_{st} f_y}{S}} \quad (31)$$

È chiaro che deve risultare :

$$T_r \geq T \quad (32)$$

## Torsione con taglio e flessione

Ogni lato della “sezione cava resistente” è soggetto alla sollecitazione risultante dei due stati di sollecitazione, flessione-taglio e torsione, che si sommano in modo algebrico (la torsione dà infatti luogo a “tagli” di segno opposto sulle facce opposte).

### ***Pareti verticali:***

si sommano, con il segno i tagli dovuti a torsione e flessione e taglio:

$$V_{sdi} = \frac{V_{sd}}{2} \pm \frac{T_e(h-t)}{2A}$$

Essendo :

t lo spessore delle solette inferiore e superiore, h l'altezza della sezione, (h-t) l'altezza delle facce laterali risultanti,  $V_{sd}$  il taglio dovuto alla sollecitazione di flessione e taglio,  $T_e$  il momento torcente.

Pertanto occorre disporre armatura longitudinale tale che sia soddisfatta la eq. ( 24):

$$A_{sl} f_y \geq \frac{T_{eq} z_i}{2A} \cot \theta = \frac{T_e (h-t)}{2A} \cot \theta$$

Occorre anche che la armatura trasversale aggiuntiva per il taglio soddisfi la eq. ( 22):

$$\frac{A_{st} f_y}{s} \cot \theta \geq \frac{F_{ti}}{z_i} = \frac{T_e (h-t)}{2A}$$

Occorre infine verificare che il taglio complessivo non danneggi le bielle compresse inclinate.

A tale scopo, nelle sezioni rettangolari, si possono adottare due ipotesi:

ipotesi a) il taglio dovuto alla flessione sia completamente assorbito dal calcestruzzo della zona centrale di larghezza:  $b-2t$ , ed una altezza pari al braccio delle forze interne (distanza tra corrente teso e compresso nel traliccio resistente) , ed il taglio della torsione sia assorbito dalle solette esterne di spessore  $t$ ;

ipotesi b) il taglio dovuto alla flessione sia assorbito in proporzione agli spessori, pertanto alla zona centrale compete una porzione pari a  $(b-2t)/b$ , alle solette laterali una porzione pari ciascuna a  $t/b$ ;

la prima ipotesi è cautelativa per la verifica dell'anima, la seconda è cautelativa per la verifica della soletta nella quale si sommano per verso il taglio dovuto alla flessione ed alla torsione.

In entrambe le ipotesi occorre verificare che secondo la eq. ( 24):

$$f_{cd2} t \cos \theta \sin \theta \geq \frac{T_{eq}}{2A}$$

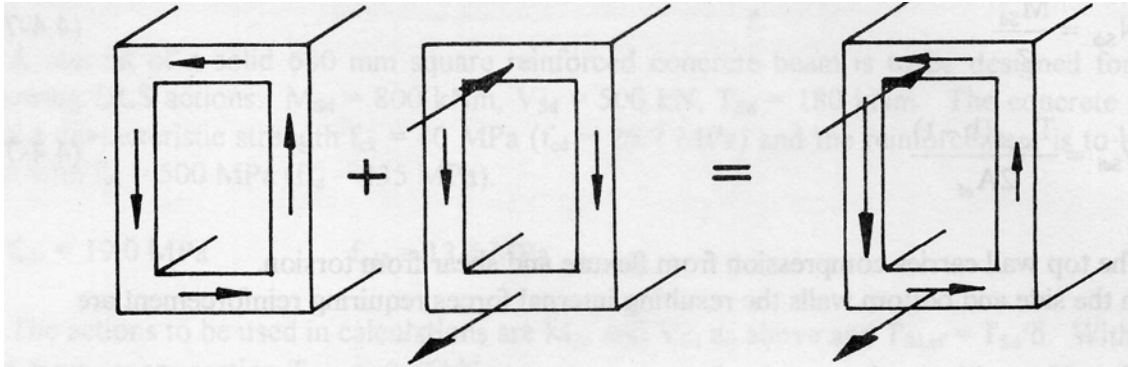


Figura 4 Combinazione delle sollecitazione di torsione e flessione-taglio nelle sezioni cave

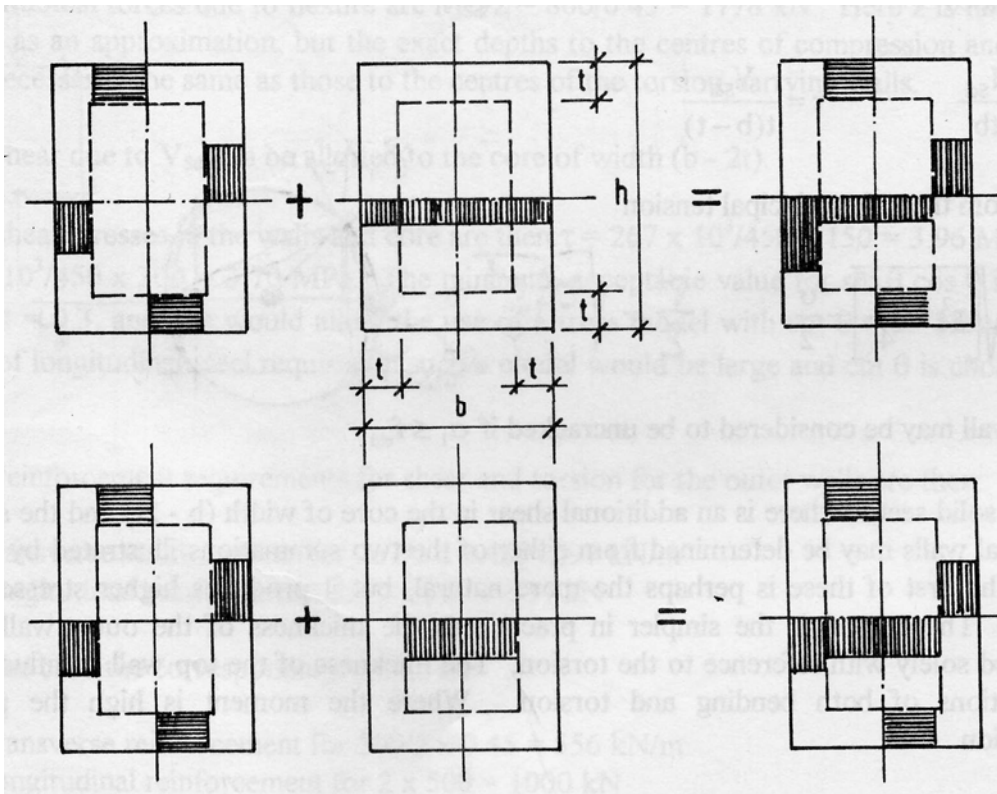


Figura 5 Ipotesi alternative per la combinazione delle sollecitazione di torsione e flessione-taglio nelle sezioni rettangolari

### ***Soletta inferiore e superiore:***

la soletta superiore è soggetta a trazione, quella inferiore a compressione, per effetto della flessione (assunta tendere le fibre inferiori), lo sforzo di trazione e compressione vale:

$$N_{sdi} = \pm \frac{M_{sd}}{z}$$

e taglio dovuto alla torsione:

$$V_{sdi} = \frac{T_e(b-t)}{2A}$$

Nella soletta inferiore si aggiunge alla armatura di trazione longitudinale dovuta alla flessione quella dovuta alla torsione.

Nella soletta superiore si valuta se la sezione è fessurate o meno. Infatti la compressione dovuta alla flessione può ridurre la tensione principale di trazione dovuta alla torsione. La soletta potrebbe quindi non essere fessurate se la tensione principale di trazione è inferiore alla resistenza a trazione  $f_{ctd}$

$$\sigma_1 = \sqrt{\tau^2 + \frac{\sigma^2}{4}} - \frac{\sigma}{2} \leq f_{ctd} \quad (33)$$

Occorre verificare inoltre, nel caso di sollecitazioni flettenti elevati, che non vi siano problemi di eccessiva compressione:

$$\sigma_2 = \sqrt{\tau^2 + \frac{\sigma^2}{4}} + \frac{\sigma}{2} \leq f_{cd1} \quad (34)$$

Nella ( 33 si è limitata la compressione alla espressione  $f_{cd1}$  facendo riferimento al fatto che la soletta superiore sarà non fessurata se è presente un forte sollecitazione flettente, si ricorda infatti che è la resistenza a compressione del calcestruzzo non fessurato:

$$f_{cd1} = 0.85 \left[ 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] f_{cd} \quad (35)$$

Nel caso di calcestruzzo fessurato in direzione non parallela alla direzione della compressione si deve invece adottare un valore cautelativo della resistenza a compressione:

$$f_{cd2} = 0.70 f_{cd1} \quad (36)$$

In particolare nelle pareti laterali della trave la resistenza a compressione da considerare è quella relativa al calcestruzzo fessurato  $f_{cd2}$ .

### **Esempio di Sezione sollecitata a torsione e flessione e taglio**

Si ha una trave doppiamente incastrata, soggetta a flessione e torsione. La luce della trave sia 8 metri, il carico totale al metro, incluso i permanenti sia 125 KN/m, ed agisca con eccentricità di 360 mm, il momento torcente complessivo al metro risulta di 45 KNm/m. La trave abbia sezione resistente 600x600 mm. Il calcestruzzo ha resistenza caratteristica cilindrica  $f_{ck} = 40$  Mpa la resistenza di progetto con  $\gamma_c = 1.5$  vale quindi  $f_{cd} = 26.7$  Mpa, con un acciaio di tipo Feb 44 k, avente quindi  $f_{yk} = 440$  Mpa ed  $f_{yd} = 382$  Mpa ( $\gamma_s = 1.15$ )

Le caratteristiche del conglomerato da utilizzare sono:

$$f_{cd1} = 0.85 \left[ 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] f_{cd} = 0.85 [1 - 40/250] 26.7 = 19.0 \text{ Mpa}$$

$$f_{cd2} = 0.70 f_{cd1} = 19.0 \times 0.7 = 13.3 \text{ Mpa}$$

Le caratteristiche di sollecitazione all'incastro risultano pertanto:

$$M = 1/12 \times 125 \times 8^2 = 800 \text{ KNm}$$

$$V = 1/2 \times 125 \times 8 = 500 \text{ KN}$$

$$T = 1/2 \times 8 \times 125 \times 0.36 = 180 \text{ KNm}$$

Il momento torcente di progetto per la sezione quadrata si ottiene da quello di calcolo mediante l'eq. (18)

$$\delta = 1 - 0.25 b_x / b_y$$

$$T_{eq} = T / \delta$$

$$T_{eq} = 180 / (1 - 0.25) = 180 / 0.75 = 240 \text{ KNm}$$

Stimando lo spessore della sezione resistente a torsione secondo le indicazioni dell'Eurocodice 2:

$$t = A/u = 600^2 / (4 \times 600) = 150 \text{ mm}$$

Il taglio dovuto alla torsione sulle quattro solette esterne si ottiene con la espressione ( 19:

$$F_{ti} = \frac{\left(\frac{T}{\delta}\right) z_i}{2A} = \frac{T_{eq} z_i}{2A}$$

$$F_t = 240 \times (0.60 - 0.15) / (2 \times 0.45^2) = 267 \text{ KN}$$

Si deve ora valutare l'effetto della sollecitazione di flessione – taglio. Se si ipotizza che il braccio delle forze interne sia pari alla distanza tra gli assi della soletta inferiore e superiore, le risultanti di trazione e compressione valgono:

$$N = 800 / (0.6 - 0.15) = 1778 \text{ KN}$$

Si osservi che se si assume quale braccio delle forze interne il 90% della altezza utile si avrebbe:

$$N = 800 / [(0.6 - 0.05) \times 0.90] = 800 / 0.495 = 1616 \text{ KN}$$

Con una differenza del 10% che rientra nell'ambito delle incertezze relative alle schematizzazioni

fatte.

Si può ora passare alla verifica sia del nucleo centrale, deputato ad assorbire il taglio dovuto alla sollecitazione di Flessione – taglio, che delle pareti esterne deputate ad assorbire il taglio derivante dalla torsione la trazione e compressione derivanti dalla flessione. La dimensione del nucleo centrale dipende

Al fine di definire i modelli di comportamento dei tralicci, cioè l'inclinazione  $\theta$  delle bielle compresse, è possibile utilizzare l'espressione che lega le tensioni di compressione nelle bielle compresse e di taglio trasversale:

$$F_t = \sigma_{cw} t z \cos \theta \sin \theta$$

$$V_{rd} = f_{cd} b_w z \sin \theta \cos \theta$$

Dalla espressione di cui sopra si ha :

$$\frac{F_t}{t z} = \sigma_{cw} \cos \theta \sin \theta \Rightarrow \frac{\tau}{\sigma_{cw}} = \cos \theta \sin \theta$$

Da questa espressione, ricordando che  $1 \leq \cot \theta \leq 3$  si ha che il prodotto  $0.3 \leq \sin \theta \cos \theta = \tau / \sigma \leq 0.5$

Si può controllare se si è in un campo di valori accettabili del rapporto taglio compressione. In particolare è possibile sfruttare la resistenza a compressione del conglomerato aumentando l'inclinazione delle bielle compresse, in questo modo è possibile disporre meno staffe, ma occorre disporre una notevole quantità di armatura longitudinale.

Nel caso in questione i valori di  $\tau$  negli elementi vale (nucleo di conglomerato, solette laterali, solette superiore ed inferiore):

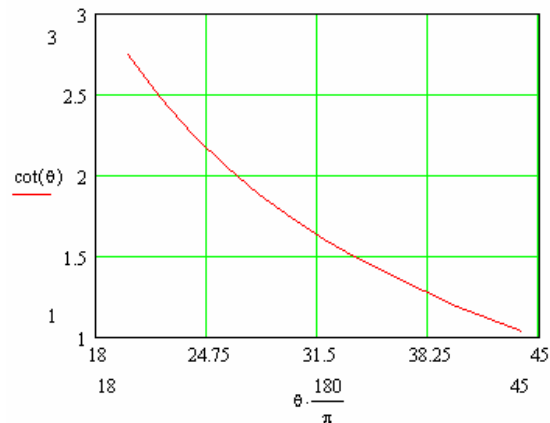
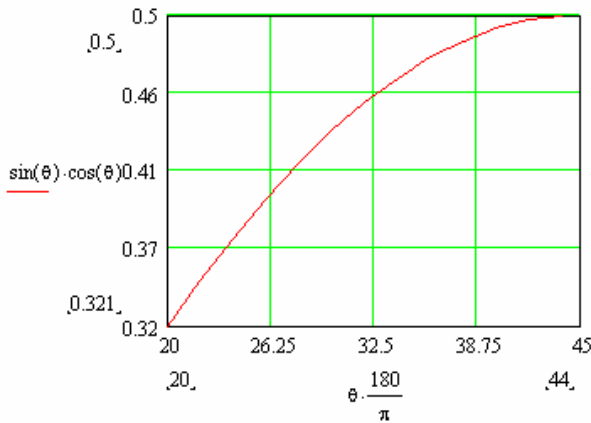


nucleo:  $\tau = 500 \cdot 10^3 / [(600-2 \times 15) \times (600-15)] = 3.70 \text{ Mpa}$

solette laterali:  $\tau = 267 \cdot 10^3 / [(600-15) \times 150] = 3.95 \text{ Mpa}$

i valori minimi di  $\tau/\sigma$  per non avere crisi in compressione si ottengono nelle solette laterali, ove è massima la  $\tau$  :

$(\tau/\sigma) = 3.95 / f_{cd2} = 3.95 / 13.3 = 0.297$



Questo valore corrisponde ad un valore dell'angolo  $\theta$  attorno al valore limite di 18.4, ove  $\cot\theta = 3$ . Il valore è possibile tuttavia si avrebbe una notevole richiesta di armatura longitudinale aggiuntiva. L'uso italiano è quello di adottare  $\cot\theta = 1$  che corrisponde ad un angolo  $\theta=45^\circ$ . Adottando un valore di  $\cot\theta=2$  si ottengono i seguenti valori degli sforzi da assegnare alle armature longitudinali e trasversali. Su ciascuna delle solette laterali resistenti a torsione si ha, rispettivamente per l'armatura longitudinale e trasversale :

$$A_{st}f_y = \frac{T_e(h-t)}{2A} \cot \theta = F_t \cot \theta = 267 \times 2 = 534 \text{ KN}$$

$$\frac{A_{st}f_y}{s} z_i \cot \theta = \frac{T_e(h-t)}{2A} \Rightarrow \frac{A_{st}f_y}{s} = \frac{T_e(h-t)}{2A} \frac{1}{z_i \cot \theta} = 267 / (2 \times 0.45) = 297 \text{ KN / m}$$

Analogamente per il nucleo si hanno i seguenti valori di armatura longitudinale e trasversale:

$$A_{st}f_y = \frac{T_e(h-t)}{2A} \cot \theta = F_t \cot \theta = 500 \times 2 = 1000 \text{ KN}$$

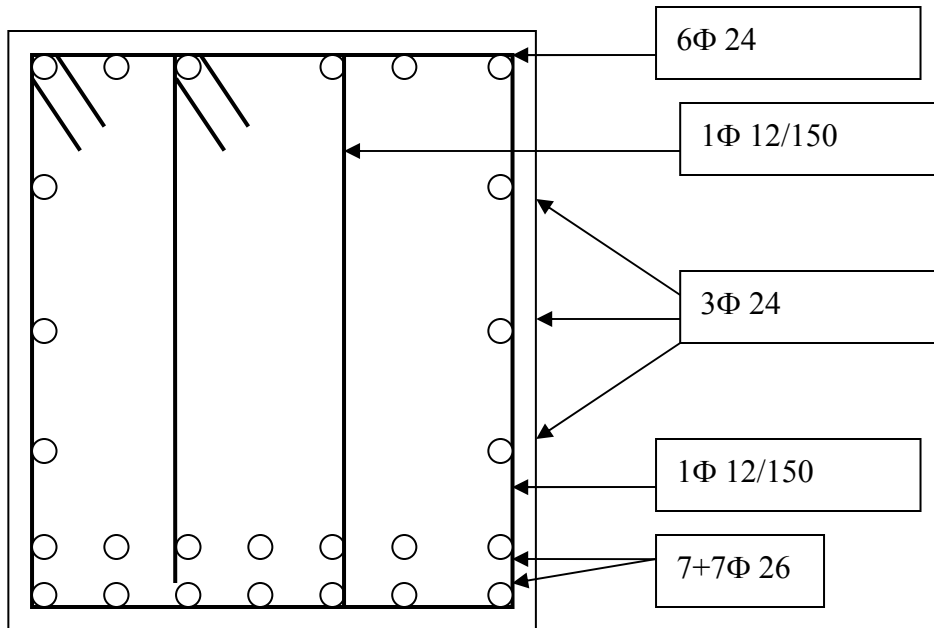
$$\frac{A_{st}f_y}{s} z_i \cot \theta = \frac{T_e(h-t)}{2A} \Rightarrow \frac{A_{st}f_y}{s} = \frac{T_e(h-t)}{2A} \frac{1}{z_i \cot \theta} = 500 / (2 \times 0.45) = 556 \text{ KN / m}$$

L'armatura longitudinale delle solette laterali sarà distribuita sul bordo delle solette, per un totale di:  $534 \times 1000 / 382 = 1392 \text{ mm}^2$  su ciascuna soletta.

L'armatura del nucleo è suddivisa al 50% tra la faccia superiore ed inferiore:  $500 \times 1000 / 382 = 1309 \text{ mm}^2$  su ciascun lato.

L'armatura trasversale risulta in:  $292 \times 1000 / 382 = 764 \text{ mm}^2/\text{m}$  su ciascuna soletta, e  $556 \times 1000 / 382 = 1455 \text{ mm}^2/\text{m}$  verticali nel nucleo.

Le staffe da disporre sono quindi una staffa esterna  $\phi 12/150 \text{ mm}$  ed una staffa interna  $\phi 12/150 \text{ mm}$ . In alternativa due staffe uguali a due bracci verticali  $\phi 12/150 \text{ mm}$ .



**Figura 6 Sezione verificata a Torsione 600 x 600 mm**

L'armatura longitudinale richiesta per resistere alle azioni taglianti, legate a torsione e flessione, si aggiunge sul lato inferiore della sezione alla armatura longitudinale necessaria a resistere al momento flettente. Lo sforzo normale complessivo al bordo inferiore è pertanto:

$$N=534+500+1778=2812 \text{ KN}$$

E l'armatura longitudinale corrispondente

$$A=2812 \times 1000 / 382 = 7361 \text{ mm}^2$$

Per un totale di 14  $\phi 26$  disposti su due strati. Il quantitativo totale di armatura disposta inferiormente è quindi di  $7429.24 \text{ mm}^2$  con un esubero di  $68 \text{ mm}^2$  rispetto a quanto necessario. Esso può essere considerato quale armatura a servizio della armatura delle facce verticali. Pertanto su di esse va disposta armatura per complessivi:  $534 \times 1000 / 382 - 68 / 2 = 1397 - 34 = 1363 \text{ mm}^2$  può essere ottenuta mediante  $3\phi 24$ .

Nella faccia superiore va disposta armatura longitudinale per complessivi  $500 \times 1000 / 382 + 534 \times 1000 / 382 = 2706.8 \text{ mm}^2$ , equivalenti a  $6\phi 24$ , somma delle esigenze legate al taglio flessionale del nucleo e torsionale della soletta superiore.

La compressione nella soletta superiore è di 1778 KN, ridotta del contributo dello sforzo assiale prodotto del taglio portato dal nucleo di 500 KN, per un totale di 1278KN. Tenendo conto della torsione presente che dà una tensione tangenziale di 3.95 MPa, le tensioni principali valgono:

$$\sigma = \sqrt{3.96^2 + 7.1^2} \pm 7.1$$

Si ottengono: una trazione massima di 1.03Mpa, pertanto si può escludere la fessurazione della soletta superiore, mentre la compressione massima risulta di 15.2 Mpa, inferiore al valore pari a  $f_{cd1} 19 \text{ Mpa}$ .

Si sarebbe quindi potuta ridurre l'armatura longitudinale tesa superiore. Questa soluzione non viene in genere adottata.

### ***Riferimenti Bibliografici***

CEB/FIB Model Code 90.

FIB bullet2 Textbook on Behaviour, Design and performance. Updated knowledge of the CEB/FIP Model Code 1990. Vol.1,2,3

